TEMA 1
CIRCUITOS LINEARES DE CORRENTE CONTÍNUA

Classificação dos circuitos eléctricos

Na teoria dos circuitos eléctricos, os componentes electromagnéticos e os processos físicos que ocorrem neles e no espaço que os rodeia são substituídos através de certos cálculos de equivalência por circuitos eléctricos.

Um circuito eléctrico é uma interligação entre fontes e conversores de energia (ou cargas), através dos quais uma corrente eléctrica pode circular.

Os fenómenos electromagnéticos que se processam num circuito eléctrico podem ser descritos em função de tensão, força electromotriz (*f.e.m.*) , resistência, indutância e capacidade.

Classificação dos circuitos eléctricos

As fontes de energia ou *f.e.m.* são dispositivos que convertem outras formas de energia (química, mecânica, etc.) em energia eléctrica.

A energia eléctrica fornecida é depois transformada, nos conversores (cargas), em outras formas de energia (trabalho mecânico, calor, luz, etc.).

Dependendo do tipo de fonte:

- podemos considerar circuitos de corrente continua, isto é, alimentados com uma fonte contínua, aquela que é invariável no tempo;
- podemos ter circuitos de corrente alternada – alimentados com fontes que variam de forma alternada no tempo.

Definição de alguns conceitos

Carga eléctrica ou quantidade de electricidade

O número de electrões em excesso ou defeito, num corpo, define a carga eléctrica ou quantidade de electricidade que esse corpo possui.
Seria, no entanto, inadequado expressá-la desta forma, já que num corpo electrizado a grandeza desse número ultrapassa os milhares de trilião.
Escolheu-se, por conseguinte, uma unidade mais conveniente: o Coulomb (C).

$$1C = 0{,}625x10^{19}\ e$$

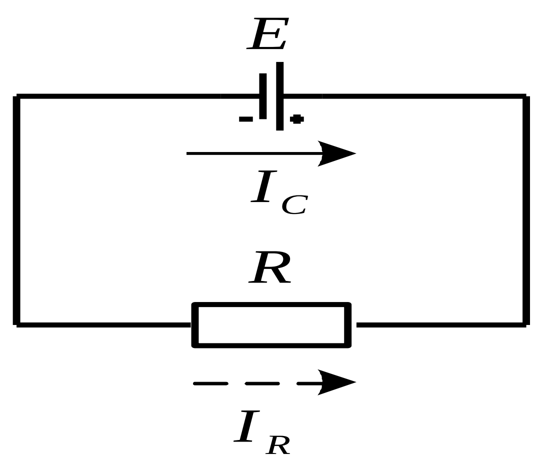
Corrente eléctrica

Sob uma diferença de potencial (d.d.p.), os electrões (cargas eléctricas negativas) adquirem um movimento orientado fluiundo, através do circuito exterior do gerador, desde a seu pólo negativo (onde existem em excesso) para o pólo positivo (onde existem em defeito).
Esta corrente de electrões continua através do gerador, voltando seguidamente ao circuito exterior.

Definição de alguns conceitos

Sentido real da corrente eléctrica – é o verdadeiro sentido do fluxo de electrões, que no circuito exterior vai desde o polo negativo para o polo positivo do gerador. Na figura abaixo o sentido real é da corrente I_R.

Sentido ideal da corrente – Embora o sentido real seja o que realmente coincide com o movimento das electrões, não é contudo esse que se representa, mas precisamente o oposto àquele. No circuito exterior tem o sentido do polo positivo para o negativo do gerador. Na figura dada, o sentido convencional é da corrente I_C.



Definição de alguns conceitos

Intensidade da corrente eléctrica

A intensidade da corrente eléctrica é a quantidade de electricidade que passa numa determinada secção de um circuito na unidade de tempo. Define-se matemáticamente, como:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

No caso de carga constante, pode-se escrever: $I = \frac{Q}{t}$

A unidade da corrente é o Ampere, A que corresponde à intensidade de uma corrente eléctrica que transporta a carga de um coulomb durante um segundo.

Definição de alguns conceitos

Potencial ou tensão eléctrica

Para fazer uma carga mover-se através de um elemento de circuito, deve ser aplicada energia. A energia necessária para movimentar uma carga positiva de um coulomb através de um elemento de circuito é designada diferença de potencial ou tensão sobre o elemento.
A diferença de potencial u entre dois pontos, em qualquer instante de tempo, quando a energia w é aplicada para movimentar a carga q é:

$$u = \frac{w}{q}$$

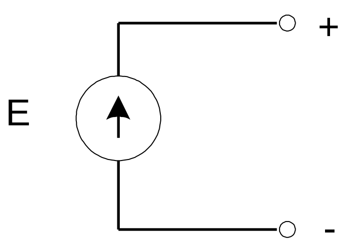
A unidade do potencial eléctrico, no SI, é o volt (V) que corresponde a um joule (J) por coulomb (C).

Definição de alguns conceitos

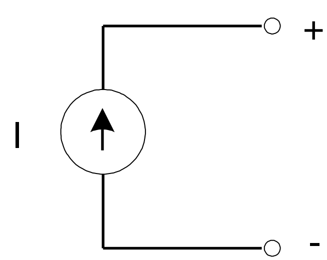
Fontes de tensão e de corrente

Uma fonte ideal de tensão é aquela na qual a tensão nos seus terminais é independente da carga. Numa fonte ideal de corrente, a corrente na saída da fonte não depende da carga a ela acoplada.

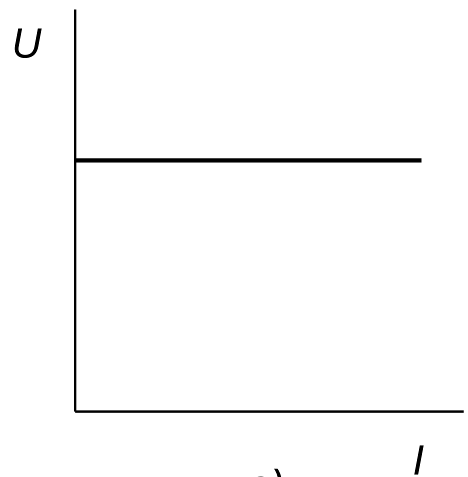
Nas figuras que se seguem estão mostradas as representações gráficas de fontes ideais de tensão e corrente e as respectivas características Tensão/Corrente.



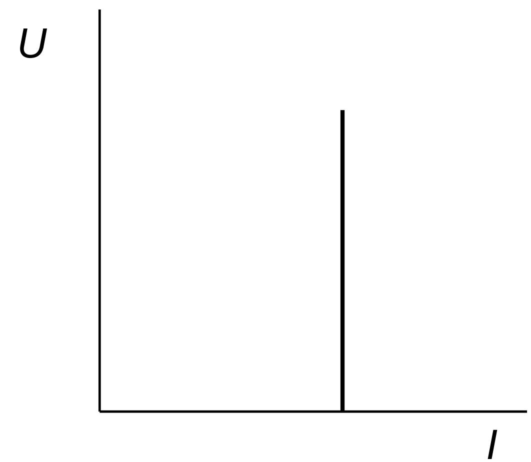
a)



b)



a)

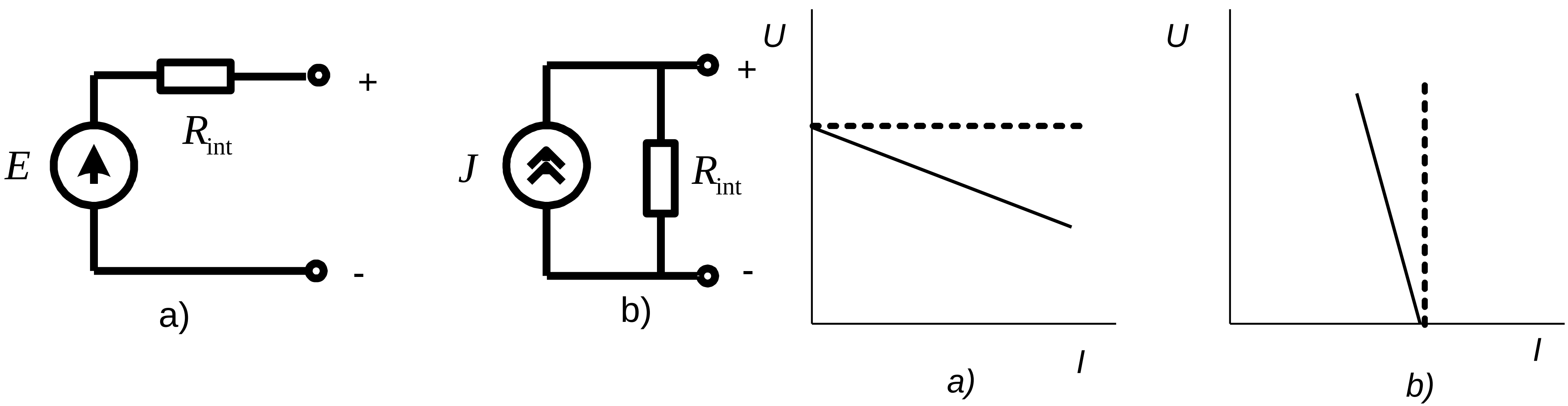


b)

Definição de alguns conceitos

Fontes de tensão e de corrente reais e respectivas características

Volt-Ampere



Definição de alguns conceitos

Resistência eléctrica

A resistência eléctrica, R, de um elemento de circuito é a propriedade física que descreve a capacidade de o mesmo dificultar o fluxo de corrente e é definida como:

$$R = \frac{U}{I}$$

No sistema internacional de unidades a resistência é medida em Ohm, Ω. Para muitos materiais, se a temperatura não mudar, a corrente é directamente proporcional à diferença de potencial e a resistência é então uma constante. Esta relação é conhecida como ***lei de Ohm.***

Definição de alguns conceitos

O termo condutância, G , é usado para o inverso da resistência e fisicamente representa a facilidade com o material se deixa atravessar pela corrente.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$

Outra relação utilizada no cálculo da resistência é a mostrada a seguir:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Onde ρ é a resistência específica ou resistividade do material, l é o comprimento do condutor e S a secção transversal.

Definição de alguns conceitos

Potência eléctrica

Quando um condutor é percorrido por corrente, ou seja, quando os electrões livres que nele existem se movimentam por acção de um campo eléctrico exterior, ocorrem choques dos electrões livres com as partículas estacionárias que formam o material. Há portanto uma transformação da energia do campo eléctrico em calor.

Pode então exprimir-se a quantidade de calor libertada por um condutor, em termos da queda de tensão entre os seus extremos e da corrente que nele circula.
Seja U a queda de tensão ou a d.d.p. entre os extremos do condutor e seja Q a carga movendo-se através do condutor ($Q = I\ t$). Tendo em conta que $U = \frac{W}{Q}$, podemos escrever:

$$W = UIt$$

Finalmente podemos exprimir a potência, usando a relação:

$$P = \frac{W}{t} = UI = I^2R$$

Trocas de energia nos circuitos eléctricos

As trocas de energia nos circuitos eléctricos obedecem à lei de conservação de energia. Assim a potência que é produzida nas fontes deve ser completamente debitada nas cargas.

$$\sum P_{FORNECIDA} = \sum P_{CONSUMIDA} \; ; \; \sum P_{FORNECIDA} = \sum E\ I + \sum U\ J \; ; \; \sum P_{CONSUMIDA} = \sum I^2\ R$$

O primeiro termo da potência fornecida refere-se à potência fornecida por fontes de tensão e o segundo termo à potência fornecida pelas fontes de correntes.

Leis de Kirchoff

Lei de Kirchoff da corrente

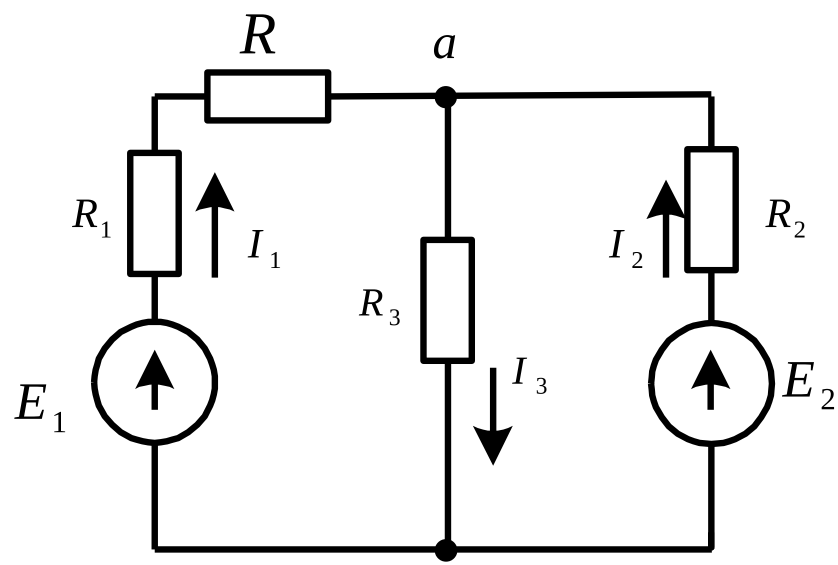
Antes de enunciarmos a lei de Kirchoff da corrente convém que definamos o conceito de circuito ramificado e nó.
Um circuito diz-se ramificado ou derivado se nele temos mais do que uma corrente. A figura que se segue mostra-nos um circuito ramificado onde é possível termos 3 correntes.
O ponto a na figua é designado nó. Este ponto corresponde ao ponto de convergência das três correntes do circuito.
A lei de nós estabelece que “a soma algébrica das correntes num nó é igual a zero”. Outra forma de enunciar esta lei é ”a soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem do mesmo nó”

$I_1 + I_2 = I_3$ ou $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Leis de Kirchoff

Lei de Kirchoff da tensão

Tomando o exemplo da figura apresentada, podemos agora definir o conceito de malha ou contorno fechado. Vemos que neste caso são possíveis três contornos fechados.

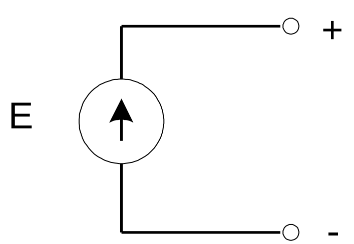


Leis de Kirchoff

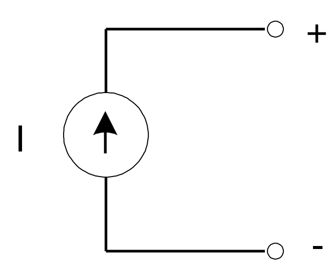
A lei de malhas estabelece que “a soma das tensões ao longo de um contorno fechado é igual a zero”, ou “ a soma das quedas de tensão ao longo de um circuito fechado é igual à soma das *fem* ao longo do mesmo”

Aplicando esta lei para a malha que envolve R_1, R, R_3 e E_1, no sentido dos elementos indicados anteriormente, pode-se escrever:

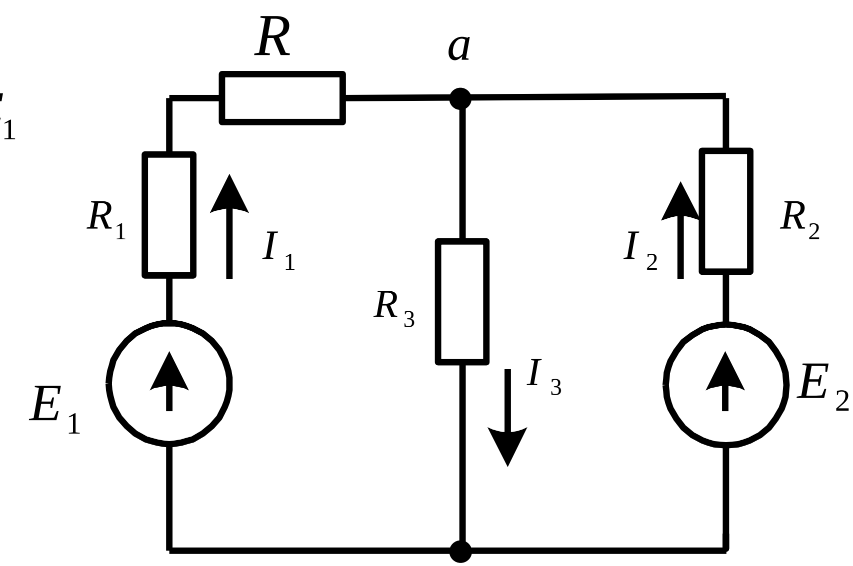
$$U_1 + U + U_3 - E_1 = 0 \quad \text{ou} \quad U_1 + U + U_3 = E_1$$



a)

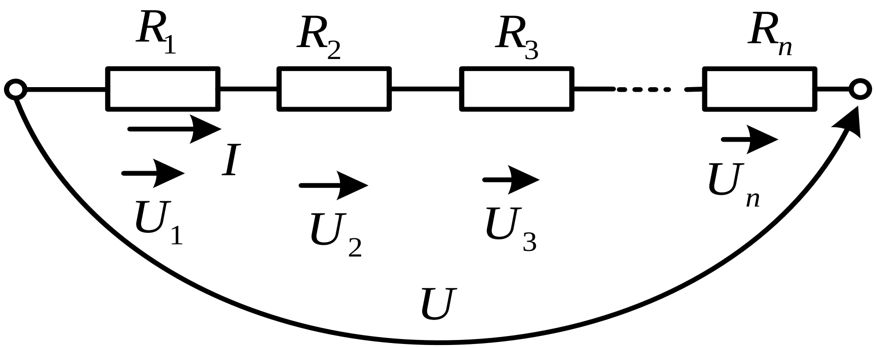


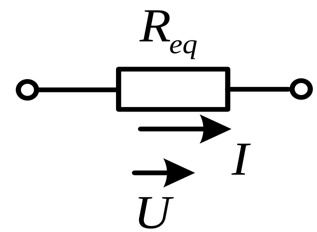
b)



Associação de resistências em série

Numa ligação de resitências em série, a corrente que flui no circuito é a mesma e pode-se obter uma resistência equivalente do conjunto.





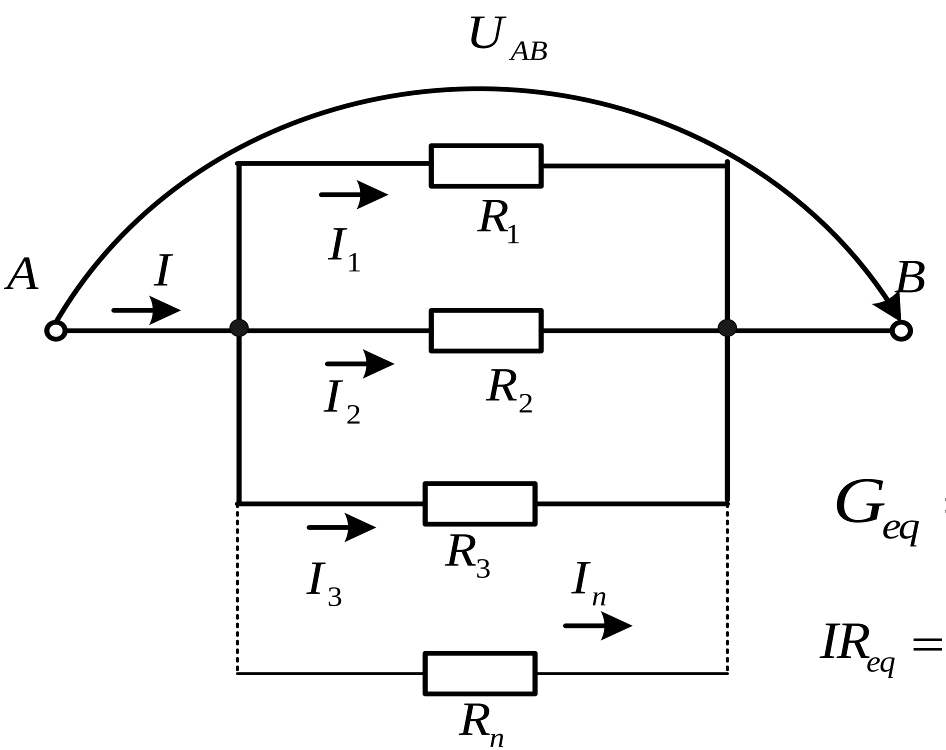
$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n \rightarrow U = I\,(R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n)$$

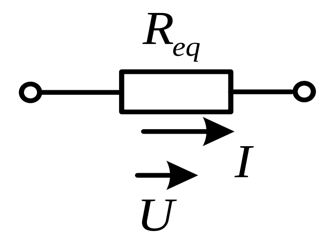
$$\frac{U}{I} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n \qquad I = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} = ... = \frac{U_n}{R_n}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n \qquad U_1 = R_1 \frac{U}{R_{eq}} \qquad U_n = R_n \frac{U}{R_{eq}}$$

Associação de resistências em paralelo

Os terminais das resistências encontram-se conectados entre si. Por isso mesmo deve-se cumprir a condição de que todas as resistências tenham a mesma tensão.





$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = U_{AB}(G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n)$$

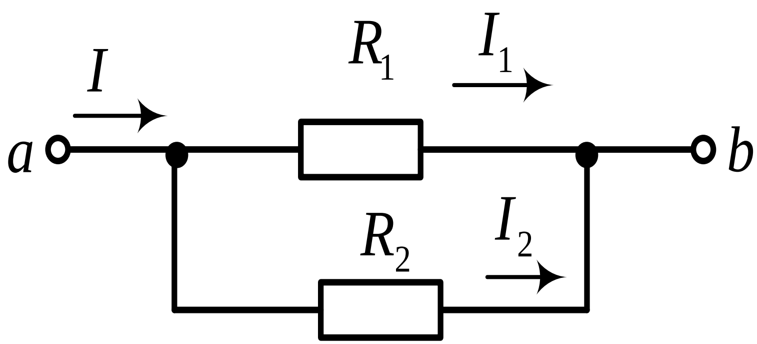
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n \qquad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}}$$

$$IR_{eq} = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \ldots = I_n R_n$$

$$I_1 = I\frac{R_{eq}}{R_1};\ I_2 = I\frac{R_{eq}}{R_2};\ I_3 = I\frac{R_{eq}}{R_3};\ I_n = I\frac{R_{eq}}{R_n} \qquad I_1 = I\frac{G_1}{G_{eq}};\ I_2 = I\frac{G_2}{G_{eq}};\ I_3 = I\frac{G_3}{G_{eq}};\ I_n = I\frac{G_n}{G_{eq}}$$

Associação de resistências em paralelo

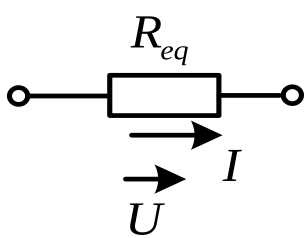
No caso de termos 2 resistências em paralelo:



$$I = I_1 + I_2 = U_{AB}\left(G_1 + G_2\right)$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

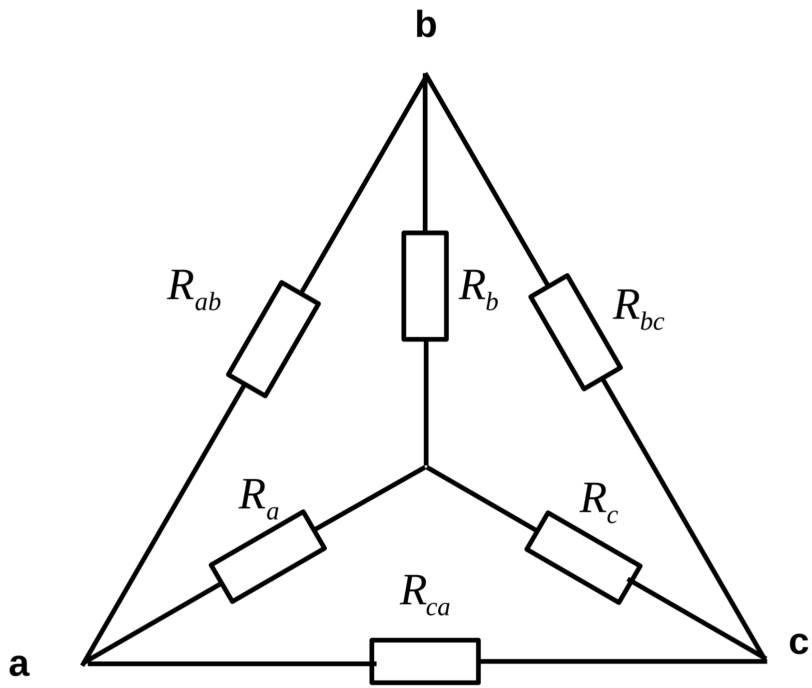


$$U_{AB} = IR_{eq} = I_1\ R_1 = I_2\ R_2 \rightarrow I\,\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1\ R_1 = I_2\ R_2$$

$$I_1 = I\,\frac{R_2}{R_1 + R_2}\,;\ I_2 = I\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Transformações estrela-triângulo e vice-versa

A resistência medida entre dois terminais, tanto da ligação estrela como da ligação triângulo, deve ser a mesma. Assim:



- Para os terminais b e c:

$$R_c + R_b = \frac{R_{bc}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

- Para os terminais c e a:

$$R_a + R_c = \frac{R_{ca}(R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

- Para os terminais a e b:

$$R_a + R_b = \frac{R_{ab}(R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Transformações estrela-triângulo e vice-versa

Na transformação de triângulo para estrela, pode-se escrever:

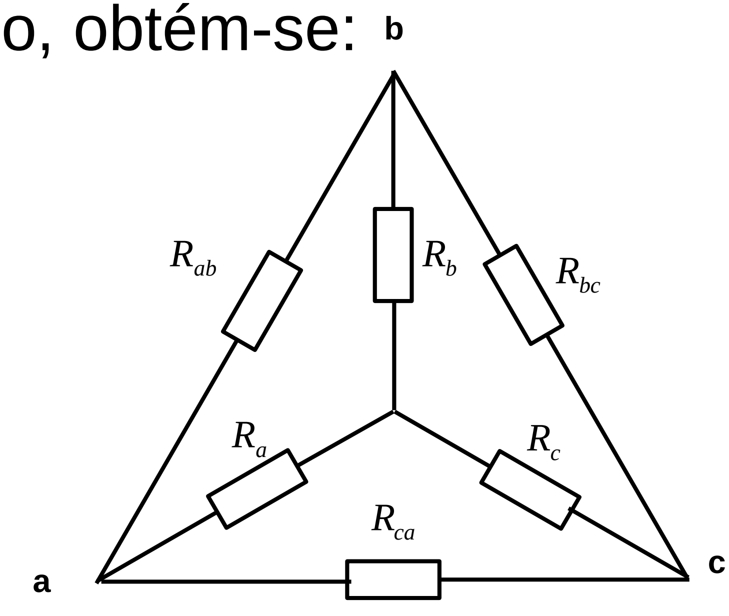
$$R_a = \frac{R_{ab}\,R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \qquad R_b = \frac{R_{bc}\,R_{ab}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \qquad R_c = \frac{R_{ca}\,R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$$

Na transformação de estrela para triângulo, obtém-se:

$$R_{ab} = \frac{R_a\,R_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_c} = R_a + R_b + \frac{R_a\,R_b}{R_c}$$

$$R_{bc} = \frac{R_a\,R_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_a} = R_b + R_c + \frac{R_bR_c}{R_a}$$

$$R_{ca} = \frac{R_a\,R_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_b} = R_c + R_a + \frac{R_aR_c}{R_b}$$



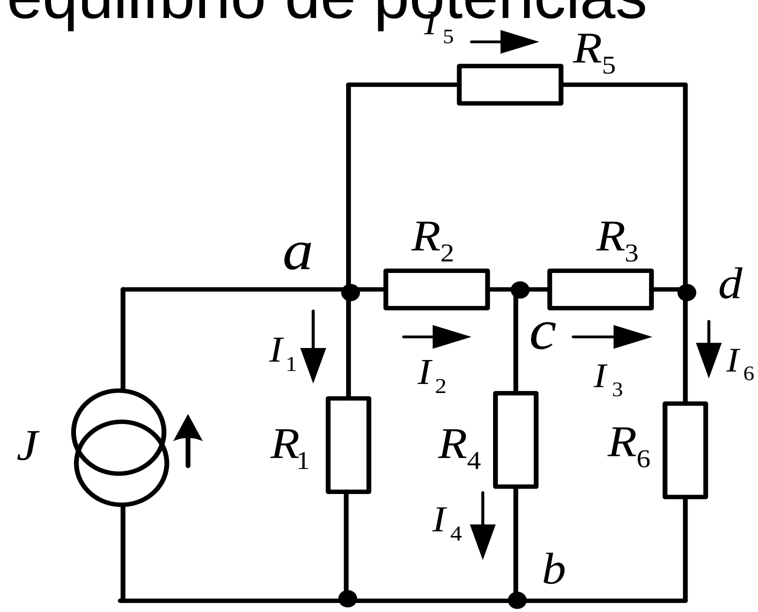
Transformações estrela-triângulo e vice-versa

Exemplo: Calcular as correntes do circuito dado aplicando o método de transformação. Verificar o equilíbrio de potências

$J = 1\,A;\ R_1 = 1\,\Omega;\ R_2 = 1\,\Omega;$

$R_3 = 1\,\Omega\,;\ R_4 = 4\,\Omega\,;\ R_5 = 1\,\Omega;$

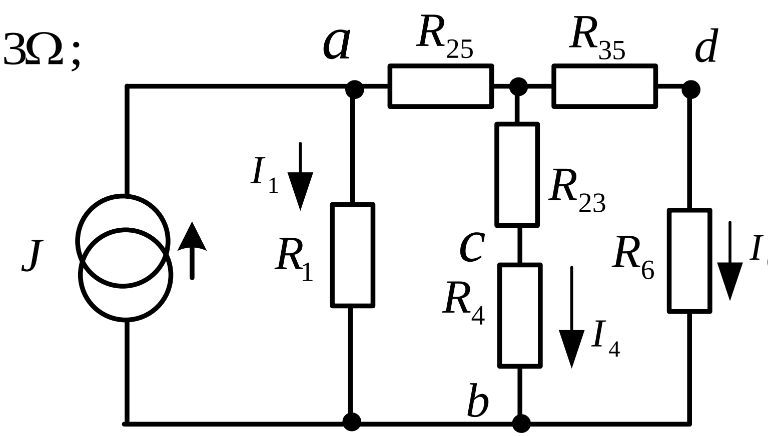
$R_6 = 2\,\Omega$



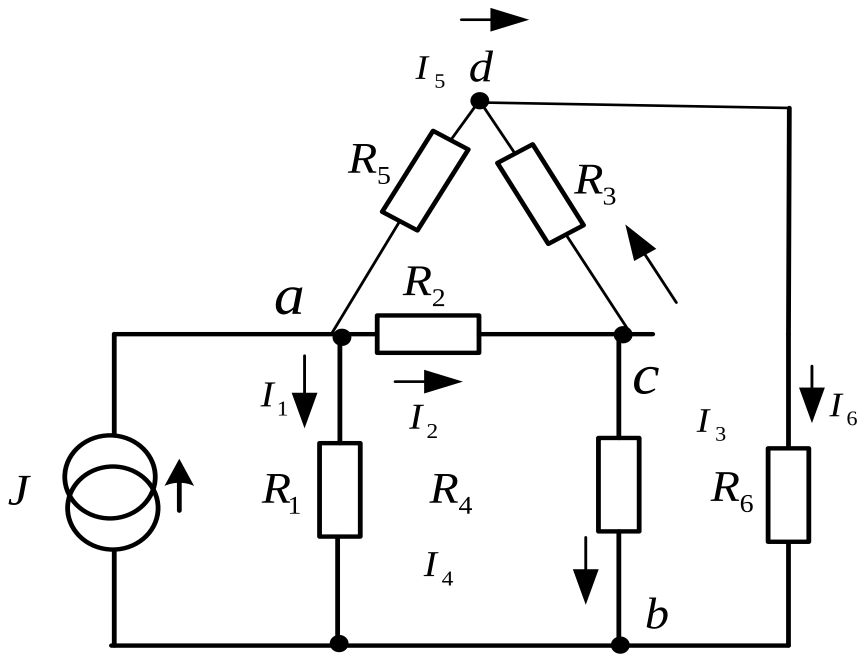
1º passo: Transformando o triângulo constituído pelas resistências R_2 , R_3 e R_5, obtemos :

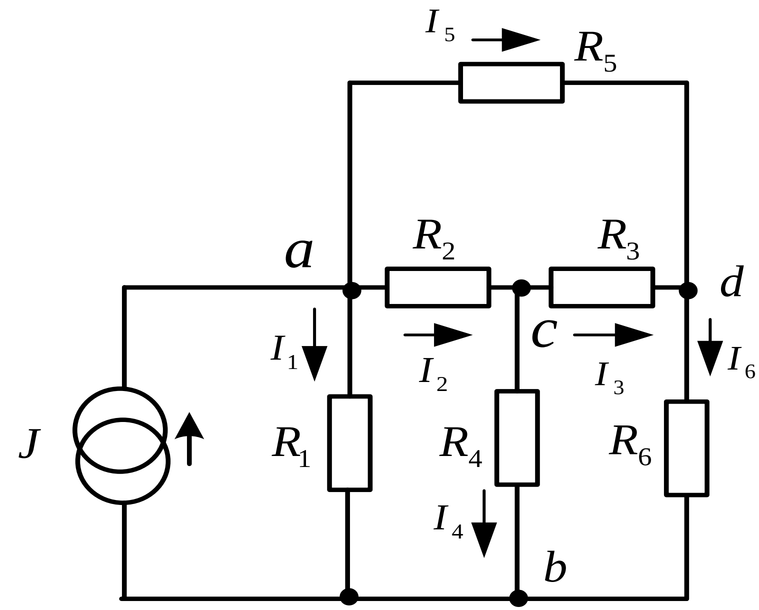
$$R_{25} = \frac{R_2\,R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 0{,}33\Omega; \qquad R_{23} = \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3 + R_5} = 0{,}33\Omega;$$

$$R_{35} = \frac{R_3\,R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 0{,}33\Omega.$$



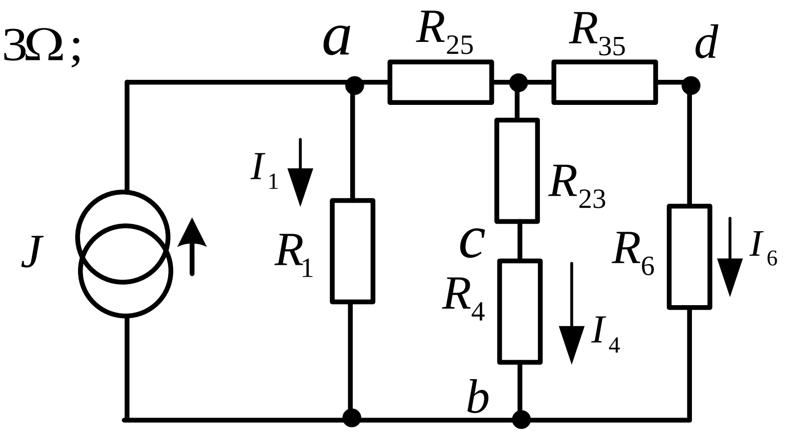
Transformações estrela-triângulo e vice-versa





$$R_{25} = \frac{R_2\ R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 0{,}33\Omega; \qquad R_{23} = \frac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3 + R_5} = 0{,}33\Omega;$$

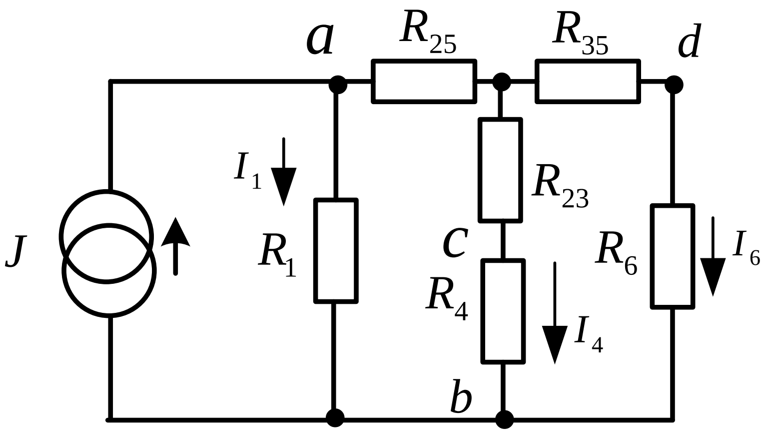
$$R_{35} = \frac{R_3\ R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 0{,}33\Omega.$$



Análise de Circuitos de Corrente Contínua

Transformações estrela-triângulo e vice-versa

2º passo: Depois da transformação pode-se representar o circuito do seguinte modo:



3º passo: Com o circuito simplificado pode-se proceder ao cálculo do mesmo:

$$R_{356} = R_{35} + R_6 = 2{,}33\Omega;$$

$$R_{234} = R_{23} + R_4 = 4{,}33\Omega; \qquad R_p = \frac{R_{356}R_{234}}{R_{356} + R_{234}} = 1{,}51\Omega;$$

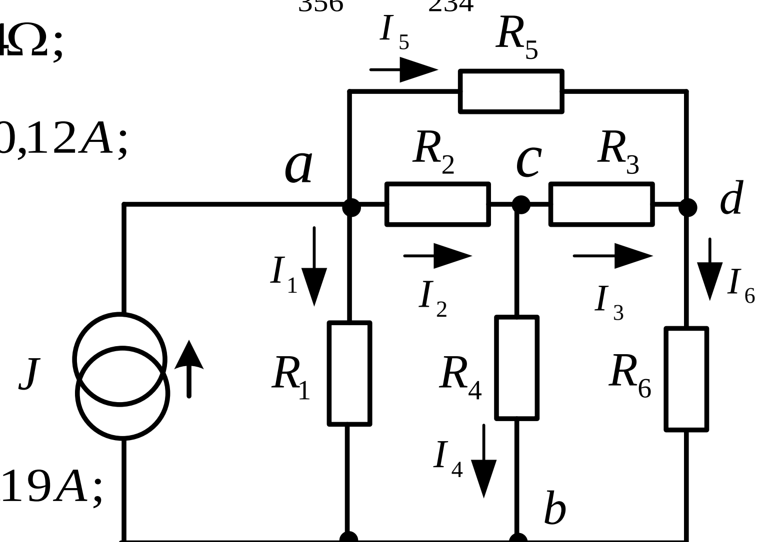
$$R_{25p} = R_p + R_{25} = 1{,}84\Omega;$$

$$I_4 = I_{25}\frac{R_{356}}{R_{356} + R_{234}} = 0{,}12A;$$

$$I_1 = J\frac{R_{25p}}{R_{25p} + R_1} = 0{,}65A; \qquad I_{25} = J - I_1 = 0{,}35A;$$

$$I_6 = I_{25} - I_4 = 0{,}23A; \qquad U_{ad} = I_{25}R_{25} + I_6R_{35} = 0{,}19V;$$

$$I_2 = J - I_1 - I_5 = 0{,}16A; \quad I_3 = I_2 - I_4 = 0{,}04A. \quad I_5 = \frac{U_{ad}}{R_5} = 0{,}19A;$$

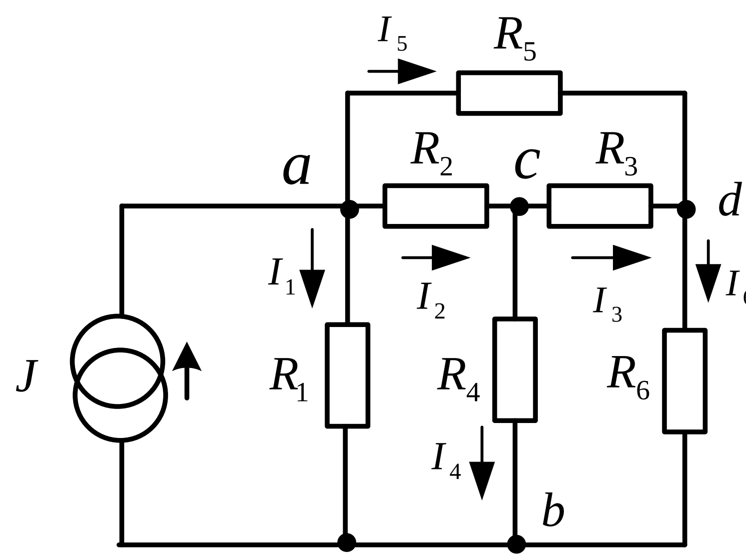


Transformações estrela-triângulo e vice-versa

Fazendo o equilíbrio de potências, obtém-se:

$$P_{carga} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 0{,}649 \approx 0{,}65W$$

$$P_{Fonte} = U_{ab} J = I_1 R_1 J = 0{,}65W$$

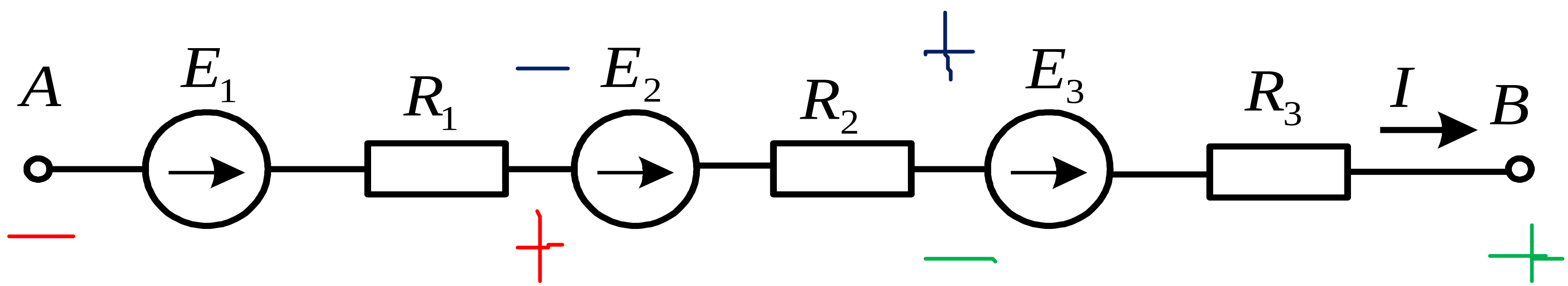


Associação de geradores de tensao

Existem dois tipos principais de associação de geradores: a associação em **série** e em **paralelo**.

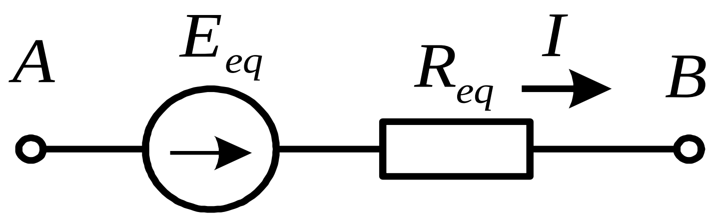
Associação em série

Os geradores são ligados de forma que sejam atravessados pela mesma corrente.



Associação de geradores de tensão

Neste caso pode-se obter uma fonte equivalente na qual a f.e.m. está em série com a resistência interna equivalente.



$$E_{eq} = E_1 + E_2 + E_3 \qquad R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

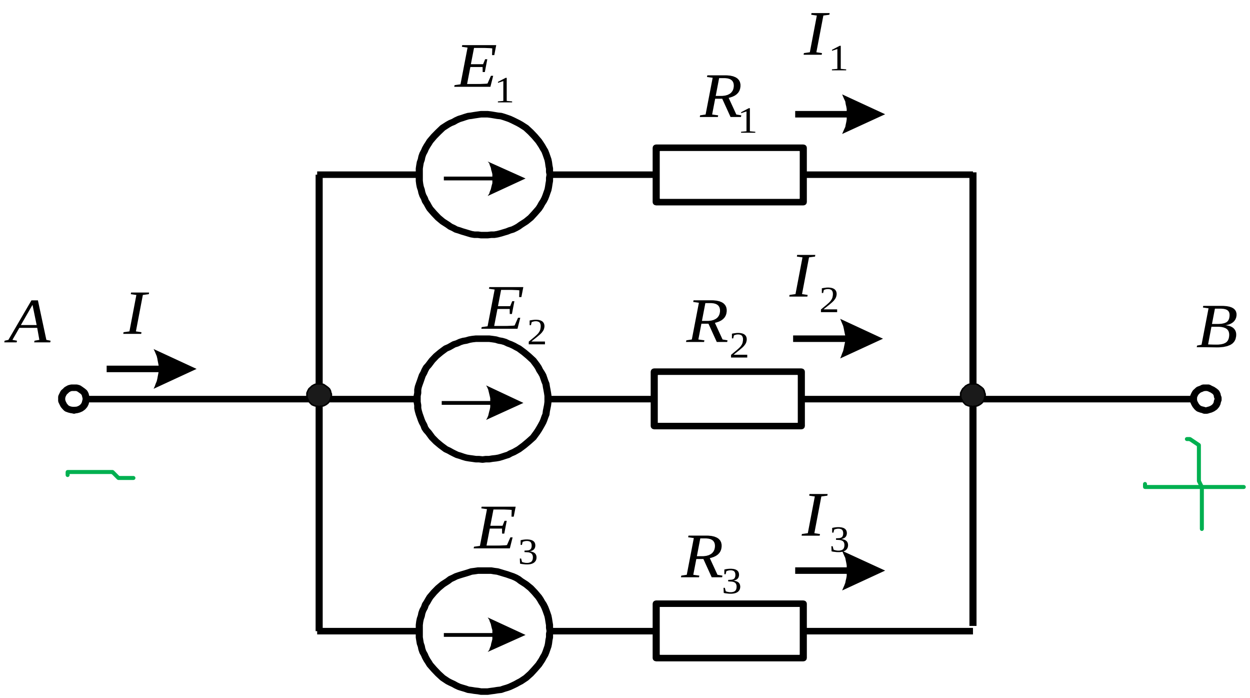
No caso geral quando temos várias fontes em série, podemos escrever:

$$E_{eq} = \sum E_i \qquad R_{eq} = \sum R_i$$

Associação de geradores de tensão

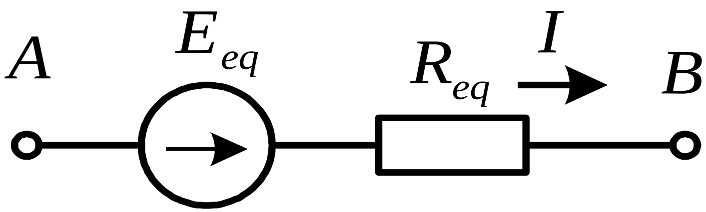
Associação em paralelo

Os terminais ou pólos do mesmo nome do gerador encontram-se conectados entre si. Por isso mesmo deve-se cumprir a condição de que todos os geradores tenham a mesma f.e.m.. De outro modo os geradores com menor f.e.m. funcionariam como cargas.



Associação de geradores de tensão

Tal como no caso da ligação em série, pode-se obter uma fonte equivalente na qual a f.e.m. está em série com a resistência interna equivalente.



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$U_{AB} = -\frac{E_1\, G_1 + E_2\, G_2 + E_3\, G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3$$

Admitindo a corrente total seja nula : $E_{eq} = U_{BA}$ $\quad G_{eq} = \sum G_n$

Seja : $E_1 = E_2 = E_3 = E \;\Rightarrow\; U_{BA} = E$

Métodos de cálculo de circuitos complexos

Metodo das leis de Kirchoff

As leis de Kirchoff são usadas nos problemas de circuitos eléctricos para calcular a corrente nos respectivos ramos. Consideremos que r seja o número total de ramos num circuito, r_c o número de ramos contendo fontes de corrente e N o número de nós. Supondo conhecidas as correntes nos ramos com fontes de correntes, então o número de equações de Kirchoff é obtido como se segue:

Assinala-se no esquema com uma seta, o sentido positivo da Corrente em cada ramo;

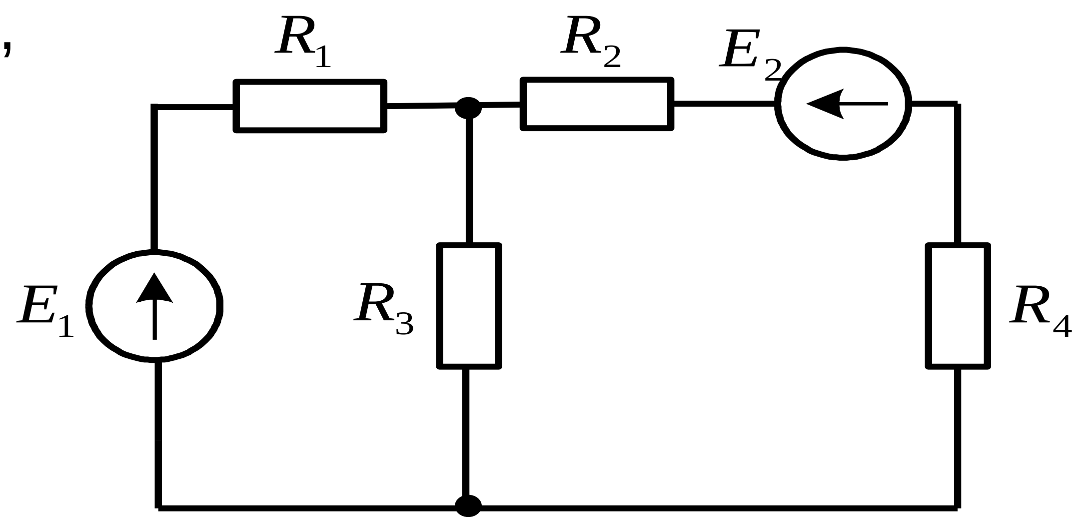
Fixa-se o sentido positivo de circulação em cada malha;

Metodo das leis de Kirchoff

Para que as equações sejam independentes, as equações da 1ª lei de Kirchoff devem ser tantas, quantos são os nós menos uma, ou ***N*** -1. As que traduzem a 2ª lei de Kirchoff devem ser tantas quantos são os ramos sem fontes de corrente, menos o número de equações da 1ª lei de Kirchoff:

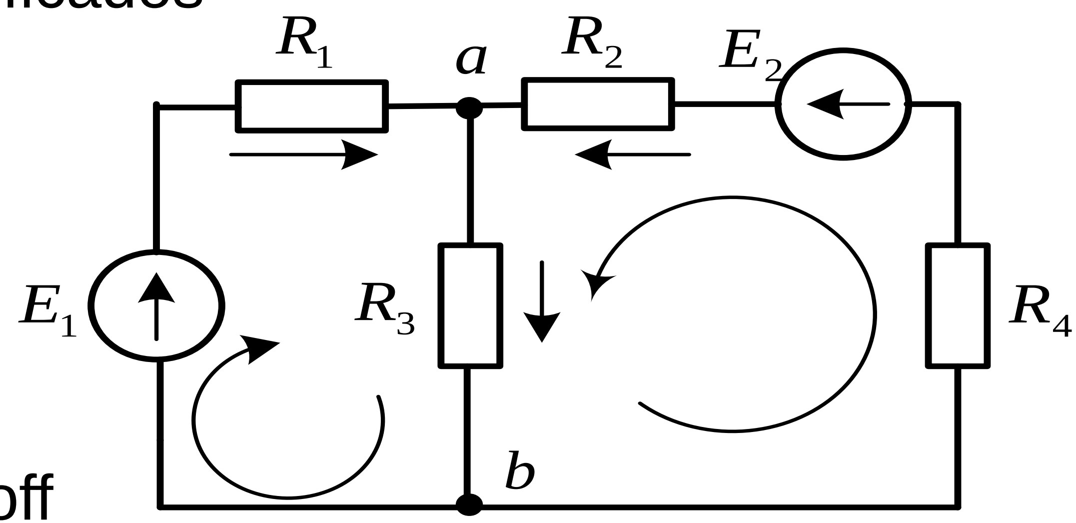
$$N_{eq} = (r - r_c) - (N - 1) = r - r_c - N + 1$$

A título de exemplo, consideremos o circuito dado.



Metodo das leis de Kirchoff

O circuito dado tem 2 nós, identificados pelas letras ***a***, e ***b***.



O número de ramos é 3 e não temos nenhuma fonte de corrente.

$$N_{eq} = (r - r_c) - (N - 1) = r - r_c - N + 1$$

De acordo com a 1ª lei de Kirchoff devem ser escrita 1 equação, que Fica:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

De acordo com a 2ª lei de Kirchoff devem ser escritas 2 equações das malhas indicadas a tracejado:

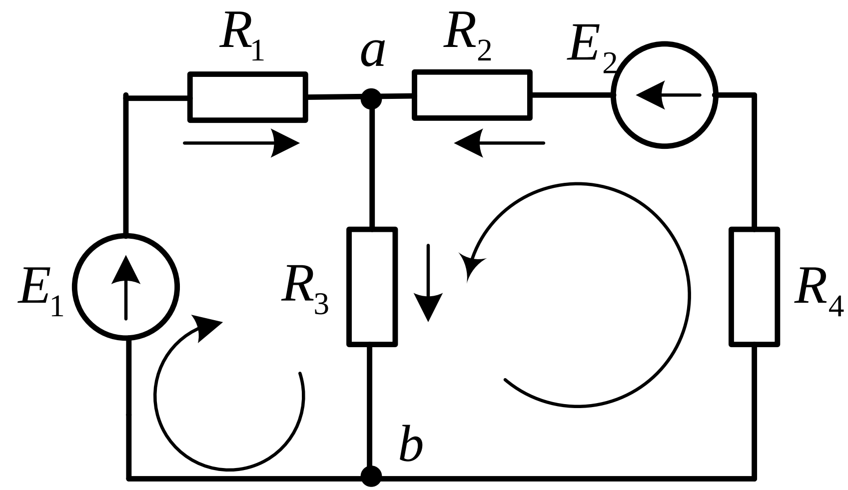
$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \qquad (R_2 + R_4) I_2 + R_3 I_3 = E_2$$

Metodo das leis de Kirchoff

Considerando os seguintes dados:

$E_1 = 12\,V;\, E_2 = 12\,V;\, R_1 = 4\,\Omega;$

$R_2 = 5\,\Omega;\, R_3 = 5\,\Omega;\, R_4 = 5\,\Omega$



A solução será: $I_1 = 1{,}09$ A; $I_2 = 0{,}44\ A$; $I_3 = 1{,}53$ A

Fazendo o equilíbrio de potências:

$$P_{Fonte} = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 12(1{,}09 + 0{,}44) = 18{,}36W$$

$$P_{c\arg a} = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 + (R_2 + R_4) I_2^2 = 4x1{,}09^2 + 5x1{,}53^2 + 10x0{,}44^2 = 18{,}39W$$

Método das correntes nas malhas (malhas independentes)

Tal como foi visto na aplicação do método das leis de Kirchoff, para que as equações sejam independentes, as equações que traduzem a 2ª lei de Kirchoff devem ser tantas quantos são os ramos sem fontes de corrente, menos o número de equações da 1ª lei de Kirchoff:

$$N_{eq} = (r - r_c) - (N - 1) = r - r_c - N + 1$$

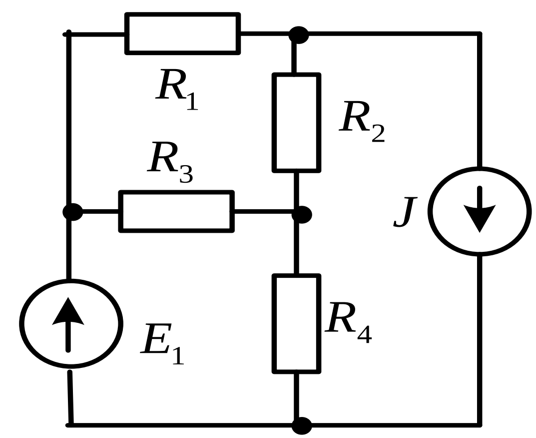
Sendo *r* o número de ramos do circuito, r_c o número de ramos com fontes de corrente e *N* o número de nós.

Métodos das malhas independentes

Exemplo: Calcular as correntes do circuito dado aplicando o método de análise de malhas.

$E_1 = 100\,V$; $J = 6\ A$; $R_1 = 2{,}5\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 40\ \Omega$; $R_4 = 20\ \Omega$.



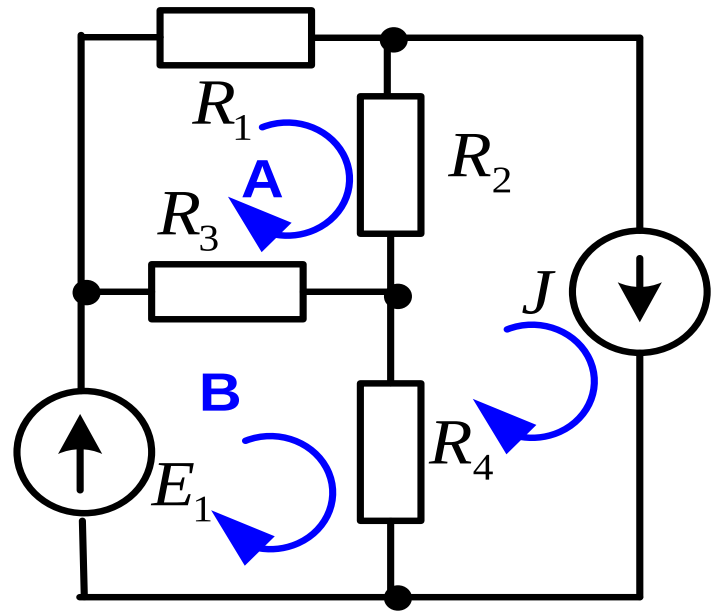
O circuito tem 6 ramos, 4 nós e um ramo com fonte de corrente, isto é, r = 6, N = 4 e r_c=1. Assim:

$$N_{eq} = 6 - 1 - 4 + 1 = 2$$

O número de equações de malhas independentes é então de 2, o que significa que devemos identificar duas malhas independentes.

Métodos das malhas independentes

As malhas identificadas estão assinaladas no circuito pelas setas a azul. Assim temos as malhas A e B e as respectivas equações estão escritas no sistema abaixo.



$$\begin{cases} I_A(R_1+R_2+R_3)-I_BR_3-JR_2=0 \\ -I_AR_3+I_B(R_3+R_4)-JR_4=E_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 52{,}5I_A-40I_B=60 \\ -40I_A+60I_B=220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5{,}25I_A-4I_B=6 \\ -4I_A+6I_B=22 \end{cases}$$

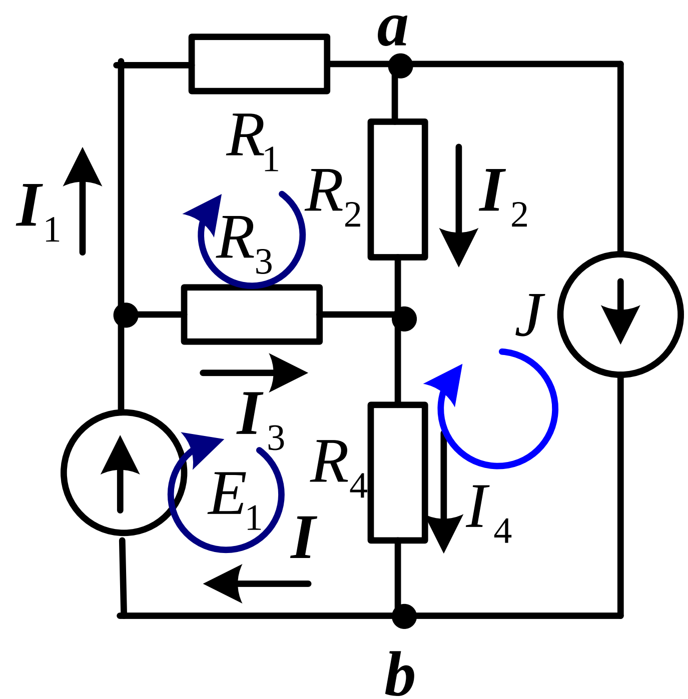
$$\begin{cases} \boldsymbol{I_A}=8\,\text{A} \\ \boldsymbol{I_B}=9\,\text{A} \end{cases}$$

$E_1=100\,V$; $J=6\ A$; $R_1=2{,}5\ \Omega$

$R_2=10\ \Omega$; $R_3=40\ \Omega$; $R_4=20\ \Omega$.

Métodos das malhas independentes

$$\begin{cases} I_1 = I_A = 8\,\text{A} \\ I = I_B = 9\,\text{A} \\ I_2 = I_A - J = 2\,A \\ I_3 = I_B - I_A = 1\,A \\ I_4 = I_B - J = 3\,A \end{cases}$$



$$U_{ab} = I_2 R_2 + I_4 R_4 = 80V; U_{ba} = -U_{ab} = -80V$$

$$\begin{cases} P_{C\arg a} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 420W \\ P_{Fonte} = U_{ba} J + EI = 420W \end{cases}$$

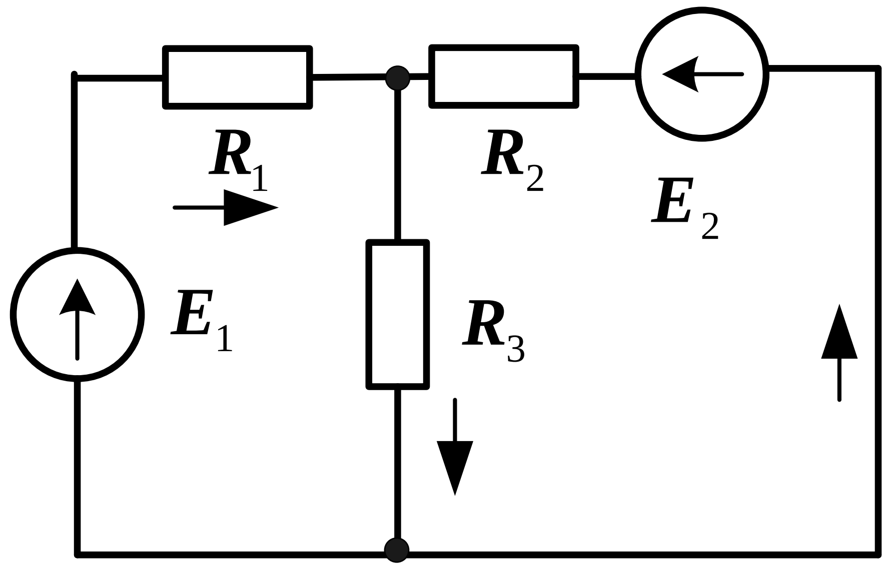
Método de sobreposição

A aplicação do método de sobreposição é para circuitos com elementos lineares e consiste em obter a influência de cada fonte presente no circuito de forma isolada, para depois se fazer a sobreposição das soluções obtidas parcialmente.

Exemplo: Considerando o circuito dado, calcular todas as correntes usando o método de sobreposição:

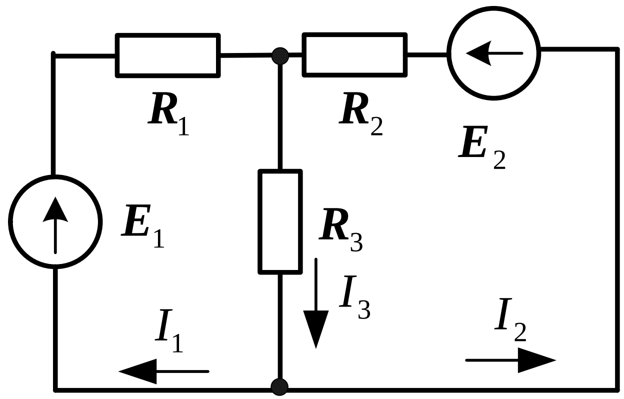
$E_1 = 2\,V;\ E_2 = 4\,V;\ R_1 = 4\,\Omega;$

$R_2 = 5\,\Omega\,;\ R_3 = 10\,\Omega$



Método de sobreposição

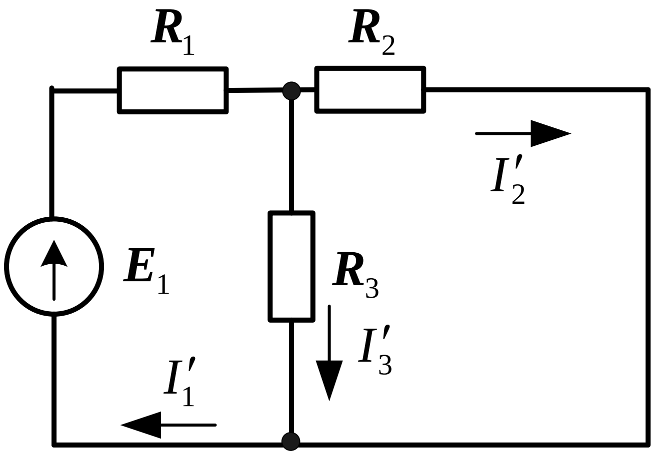
Devemos indicar os sentidos das correntes no circuito inicial.



Considerar o circuito com apenas uma das fontes de tensão de cada vez e calcular as respectivas correntes.

Método de sobreposição

Correntes da fonte 1:

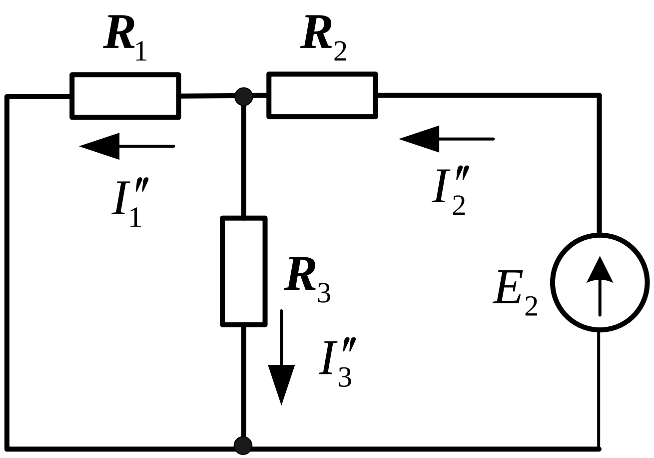


$$I'_1 = \frac{E}{R_{eq}} \quad R_{eq} = R_1 + \frac{R_3 \,.\, R_2}{R_3 + R_2} = 4 + \frac{50}{15} = 7{,}33\,\Omega$$

$$I'_1 = \frac{2}{7{,}33} = 0{,}27\ A\,;\ I'_3 = I'_1\,\frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0{,}27 \,.\, \frac{5}{15} = 0{,}09$$

$$I'_2 = I'_1 - I'_3 = 0{,}18\ A$$

Correntes da fonte 2:



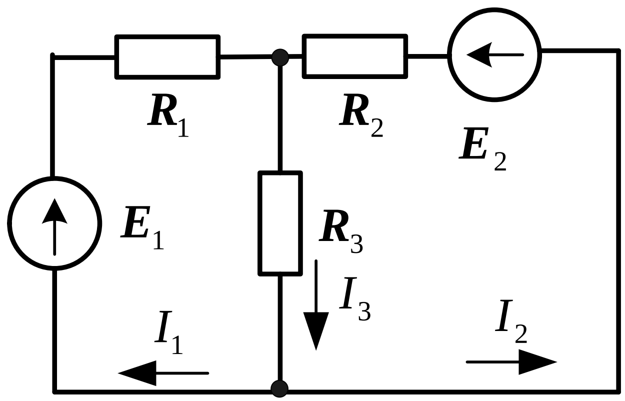
$$I''_2 = \frac{E_2}{R_{eq}} \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_3 \,.\, R_1}{R_3 + R_1} = 5 + \frac{40}{14} = 7{,}86\,\Omega$$

$$I''_2 = \frac{4}{7{,}86} = 0{,}51\ A\,;\ I''_3 = I''_2\,\frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0{,}51 . \frac{4}{14} = 0{,}15$$

$$I''_1 = I''_2 - I''_3 = 0{,}36\ A$$

Método de sobreposição

Finalmente calculamos as correntes totais:



$$I_1 = I_1' - I_1'' = -0{,}09\ A$$
$$I_2 = I_2'' - I_2' = 0{,}33\ A$$
$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0{,}24\ A$$

$$E_1 = 2\,V;\ E_2 = 4\,V;\ R_1 = 4\,\Omega;$$
$$R_2 = 5\,\Omega;\ R_3 = 10\,\Omega$$

Método das tensões nos nós ou método de análise nodal

No método de análise nodal escolhe-se como incógnitas as tensões nos nós e as equações são obtidas por aplicação da lei dos nós. A aplicação deste método pode ser sistematizada do seguinte modo:

1º passo: Identificar os nós que servem de incógnitas – Liga-se um dos nós do circuito à terra, este nó passa a ser o nó de referência e com tensão absoluta nula. Assim o número de nós com potenciais desconhecidos passa a ser N-1, sendo N o número de nós.

Método das tensões nos nós ou mesmo de análise nodal

2º passo: Existindo fontes de tensão ideiais, determinar o número destas fontes e designar por T;

3° passo: Estabelecer as N-1-T equações de nó, em função das tensões absolutas dos nós e resolver este sistema de equações.

4º passo: Obter as correntes nos ramos por aplicação da lei de Ohm.

Método das tensões nos nós ou método de análise nodal

Exemplo: Calcular as correntes do circuito dado usando análise Nodal.

$E_1 = 32V$; $R_5 = 5\Omega$

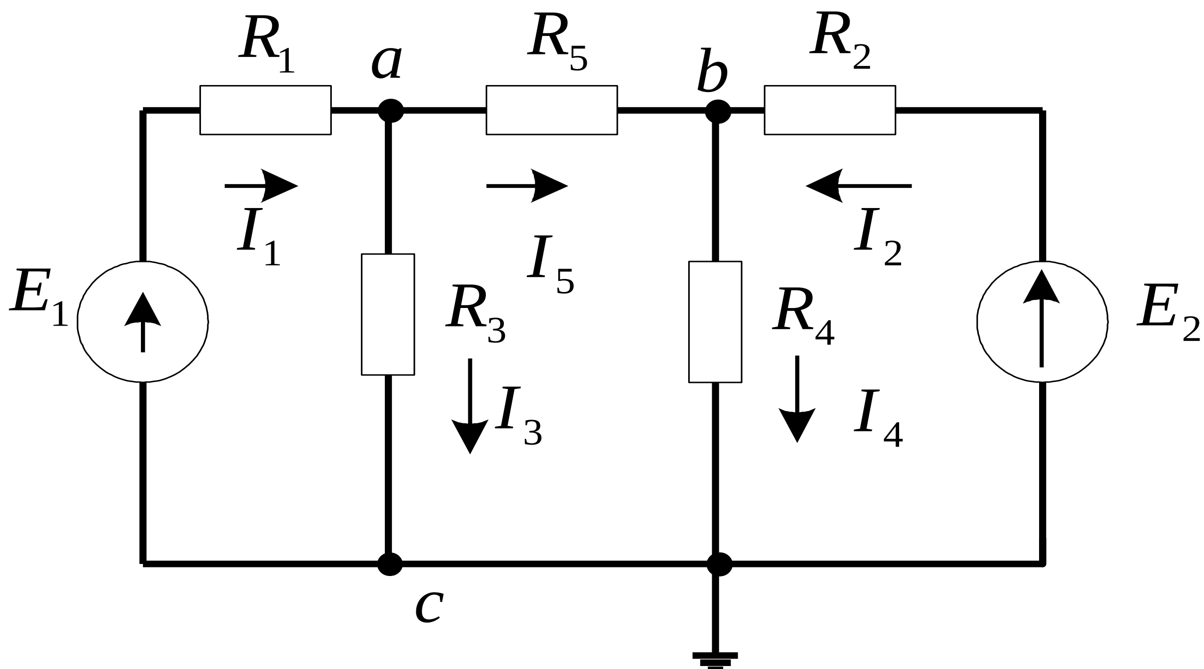
$E_2 = 32V$

$R_1 = 2\Omega$

$R_2 = 1\Omega$

$R_3 = 5\Omega$

$R_4 = 2\Omega$



Método das tensões nos nós ou método de análise nodal

$R_5 = 5\Omega$
$E_1 = 32V;$
$E_2 = 32V$
$R_1 = 2\Omega$
$R_2 = 1\Omega$
$R_3 = 5\Omega$
$R_4 = 2\Omega$

$\varphi_c = 0;$

$I_1 - I_3 - I_5 = 0;$

$I_2 + I_5 - I_4 = 0;$

$$U_{ac} + I_1R_1 = E_1$$
$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = \varphi_a$$
$$I_1 = (E_1 - \varphi_a)G_1$$

$$I_3 = \varphi_a G_3$$
$$I_4 = \varphi_b G_4$$
$$I_5 = (\varphi_a - \varphi_b)G_5$$

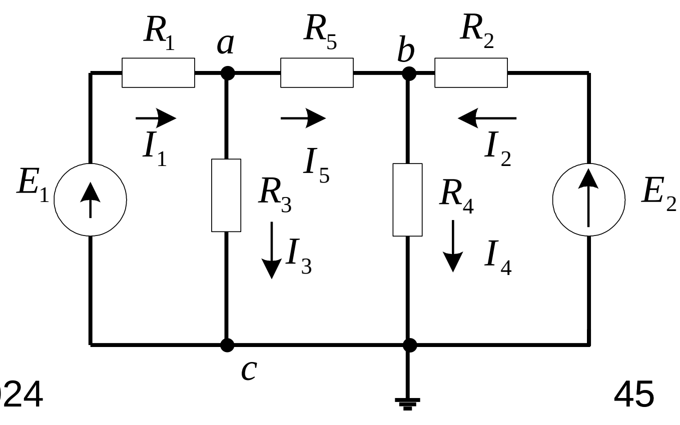
$$I_2R_2 + U_{bc} = E_2$$
$$U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = \varphi_b$$
$$I_2 = (E_2 - \varphi_b)G_2$$

As equações ficam então:

$$\begin{cases} (E_1 - \varphi_a)G_1 - \varphi_a G_3 - (\varphi_a - \varphi_b)G_5 = 0 \\ (E_2 - \varphi_b)G_2 + (\varphi_a - \varphi_b)G_5 - \varphi_b G_4 = 0 \end{cases} \curvearrowright \begin{cases} \varphi_a(G_1 + G_3 + G_5) - \varphi_b G_5 = E_1G_1 \\ -\varphi_a G_5 + \varphi_b(G_2 + G_4 + G_5) = E_2G_2 \end{cases}$$

$$G_1 = \tfrac{1}{R_1} = 0{,}5\,S;\; G_4 = \tfrac{1}{R_4} = 0{,}5\,S$$
$$G_2 = \tfrac{1}{R_2} = 1S; G_5 = \tfrac{1}{R_5} = 0{,}2\,S$$
$$G_3 = \tfrac{1}{R_3} = 0{,}2\,S$$

$$\begin{cases} 0{,}9\varphi_a - 0{,}2\varphi_b = 16 \\ -0{,}2\varphi_a + 1{,}7\varphi_b = 32 \end{cases}$$



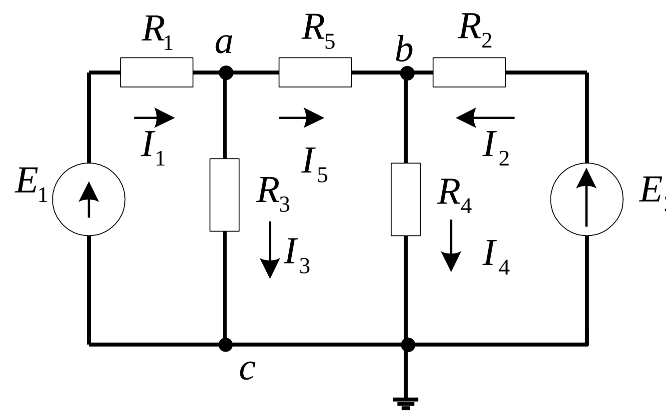
Método das tensões nos nós ou método de análise nodal

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$\begin{cases} \varphi_a = 22{,}55V \\ \varphi_b = 21{,}48V \end{cases}$$

As correntes resultam em:

$$\begin{cases} I_1 = 4{,}735A \\ I_2 = 10{,}52A \\ I_3 = 4{,}51A \\ I_4 = 10{,}74A \\ I_5 = 0{,}214A \end{cases}$$

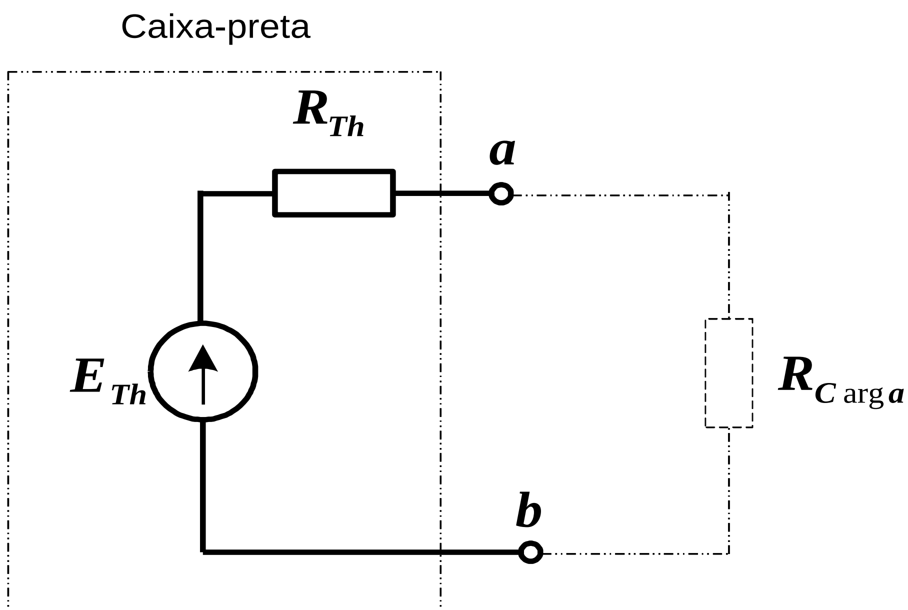


Fazendo o balanço de potências obtemos:

$$\begin{cases} P_F = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 488{,}16W \\ P_c = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 488{,}13W \end{cases}$$

Teorema de Thevenin

Qualquer circuito eléctrico em relação a dois terminais, pode ser substituído por uma fonte de tensão real.



Teorema de Thevenin

Procedimento para obter o circuito equivalente de Thevenin:

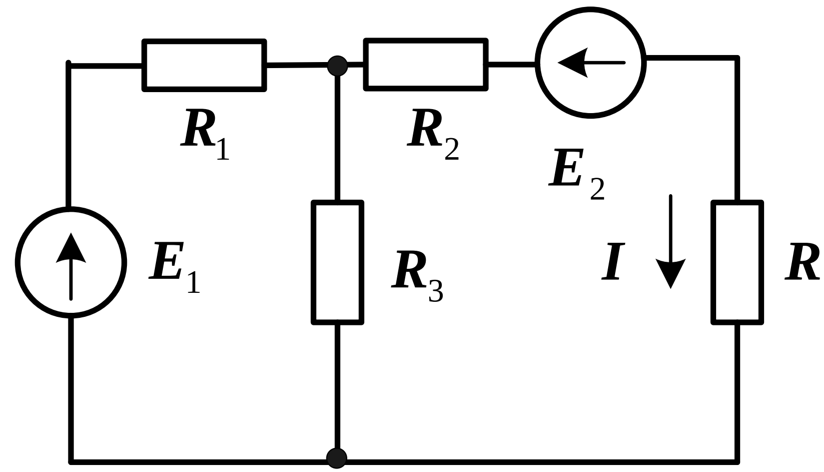
1. Dividir o circuito nas partes da fonte e da carga, conectadas a um par de terminais;
2. Considerar o circuito da fonte isolado do circuito da carga e determinar a sua tensão de circuito aberto U_{th};
3. Considerar o circuito da fonte isolado do circuito da carga e curto-circuitando as fontes de tensão e abrindo as fontes de corrente, determinar a resistência de Thevenin R_{th};
4. Considerar o circuito de Thevenin conectado ao circuito da carga e determinar as variáveis de interesse.

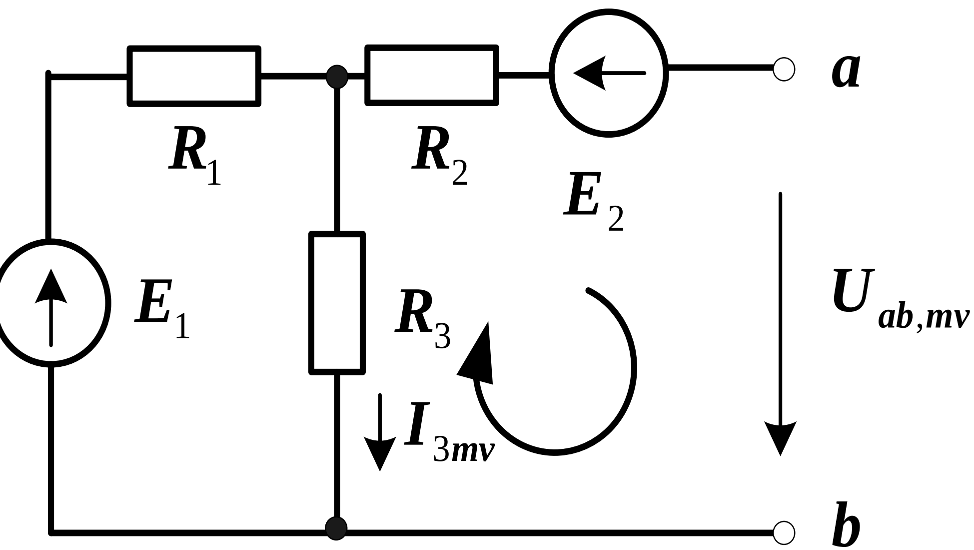
Teorema de Thevenin

Considerando o circuito dado, determinar a corrente I usando o método de Thevenin.

$$E_1 = 24\,V;\ E_2 = 6\,V;\ R_1 = 8\,\Omega;$$

$$R_2 = 5\,\Omega;\ R_3 = 4\,\Omega;\ R = 10\,\Omega$$





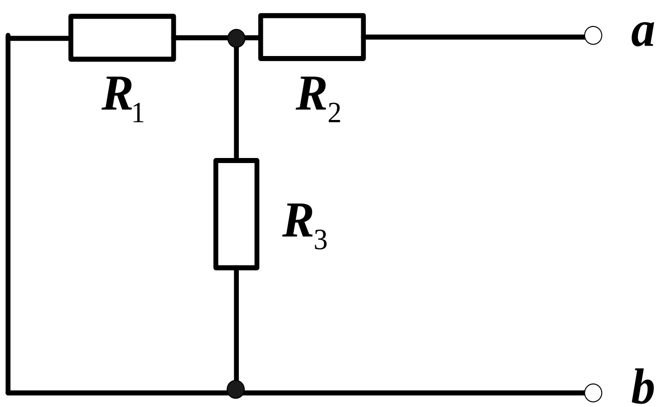
$$E_{th} = U_{ab,mv}$$

$$U_{ab,mv} - I_{3mv} R_3 = -E_2$$

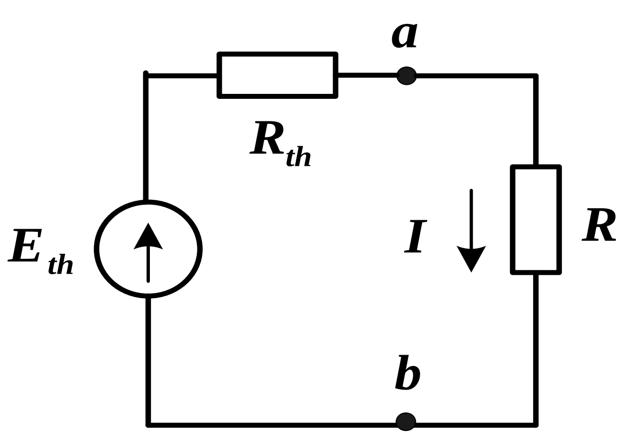
$$I_{3mv} = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = \frac{24}{12} = 2\,A$$

Teorema de Thevenin

$$U_{ab,mv} = I_{3mv} R_3 - E_2 = 2*4-6 = 2V; \qquad E_{th} = 2V$$



$$R_{th} = R_{ab} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 5 + \frac{8*4}{12} = 7{,}67\Omega$$

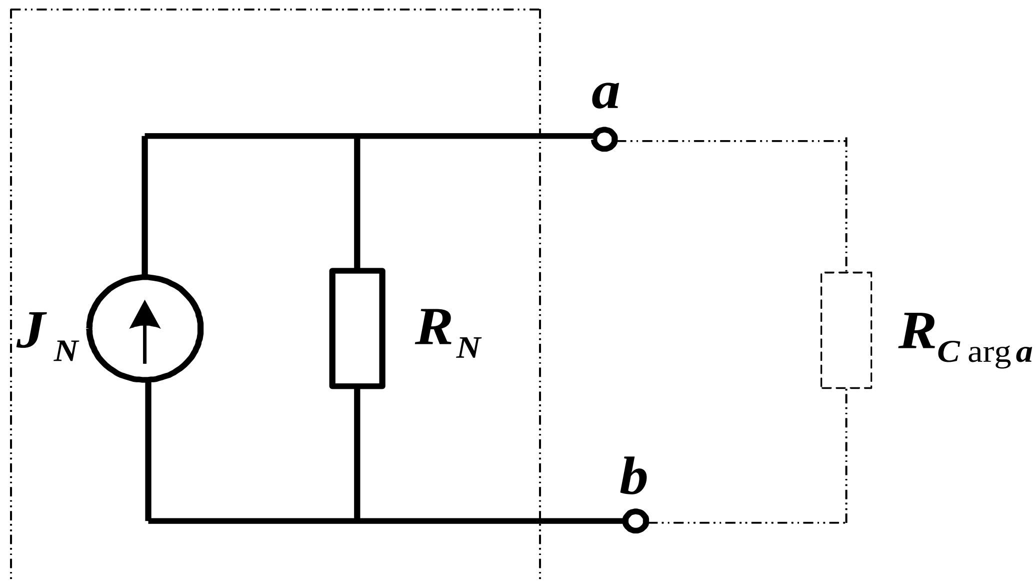


$$I = \frac{E_{th}}{R_{th} + R} = \frac{2}{7{,}67+10} = 0{,}113A$$

Teorema de Norton

Qualquer circuito eléctrico em relação a dois terminais, pode ser substituído por uma fonte de corrente real.

Caixa-preta



Teorema de Norton

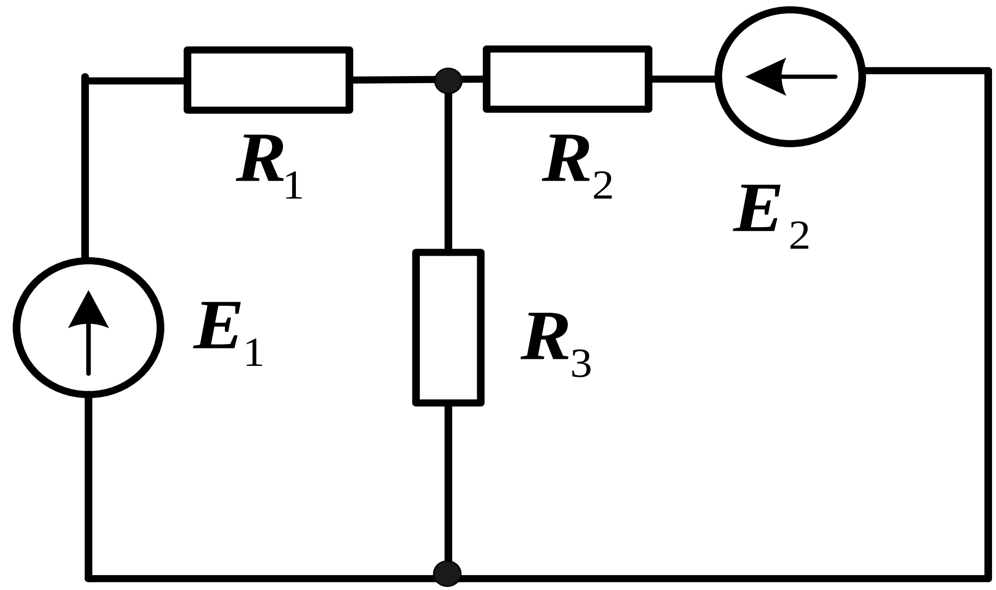
Procedimento para obter o circuito equivalente de Norton

1. Dividir o circuito nas partes da fonte e da carga, conectadas a um par de terminais;
2. Considerar o circuito da fonte isolado do circuito da carga e determinar a sua corrente de curto-circuito;
3. Considerar o circuito da fonte isolado do circuito da carga e curto-circuitando as fontes de tensão e abrindo as fontes de corrente, determinar a resistência de Norton R_N;
4. Considerar o circuito de Norton conectado ao circuito da carga e determinar as variáveis de interesse.

Teorema de Norton

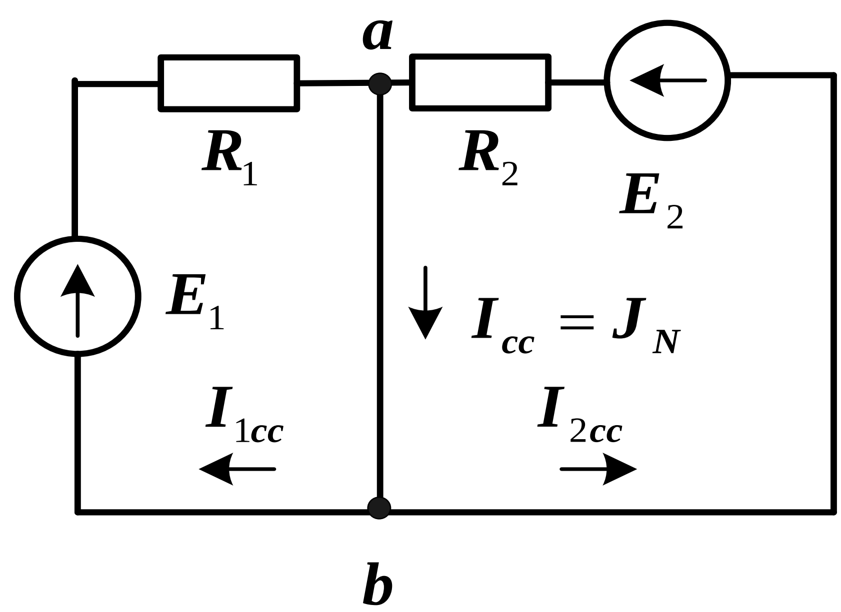
Considerando o circuito dado, determinar a corrente e a tensão na resistência R_3 usando o método de Norton.

$$E_1 = 2\,V;\ E_2 = 4\,V;\ R_1 = 4\,\Omega;$$
$$R_2 = 5\,\Omega\ ;\ R_3 = 10\,\Omega$$

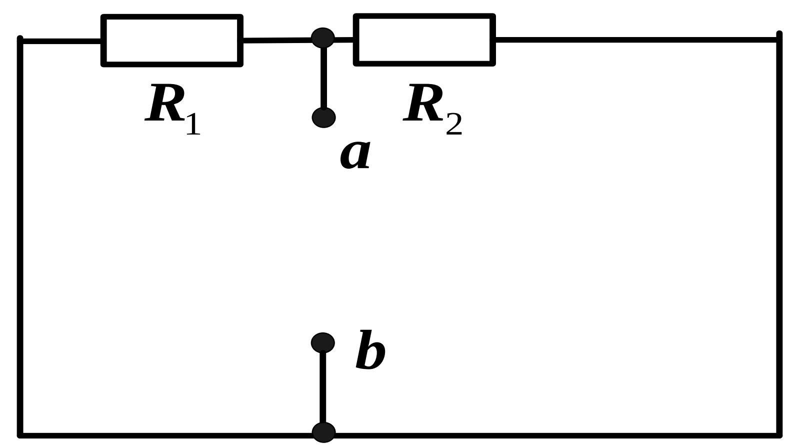


Teorema de Norton

$$J_N = I_{1cc} + I_{2cc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = 1{,}3\,A$$



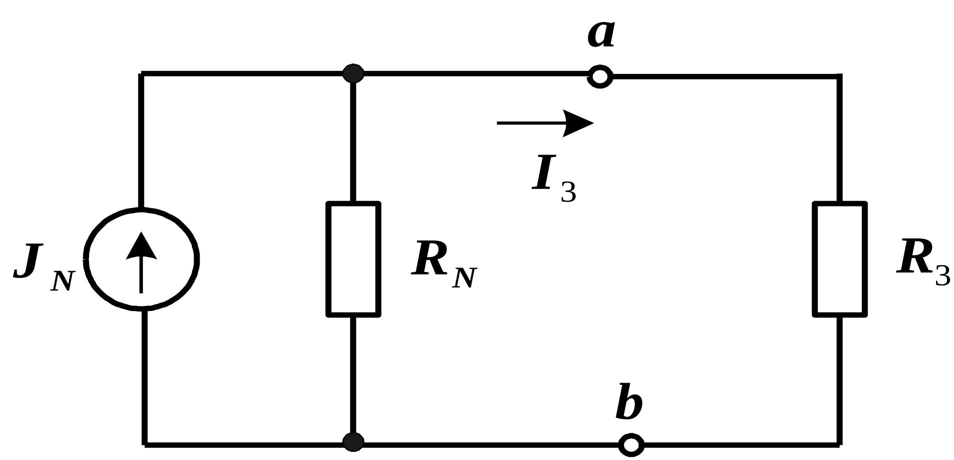
$$R_N = R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2{,}22\,\Omega$$



Teorema de Norton

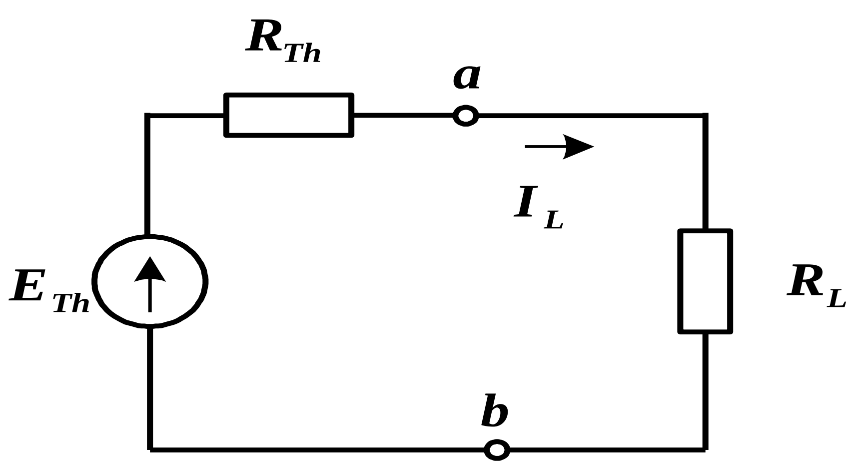
$$I_3 = J_N \frac{R_N}{R_N + R_3} = 0{,}236\,A$$

$$U_{ab} = I_3 R_3 = 2{,}36V$$



Máxima transferência de potência

Uma rede pode ser considerada como contendo dois elementos, a fonte e a carga. A fonte pode ser substituída por um circuito equivalente de Thevenin ou um circuito de Norton. Assim para uma rede puramente resistiva, a representação da fonte equivalente de Thevenin e considerando uma carga R_L, será:



Máxima transferência de potência

A potência na carga é dada por:

$$P = I_L^2 R_L \; ;$$

Atendendo que a corrente na carga é:

$$I_L = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_L} \; ;$$

Pode-se escrever a expressão da potência como se segue:

$$P = \left(\frac{E_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 R_L$$

Derivando esta expressão em ordem a R_L, pode-se determinar as condições de potência máxima na carga.

Máxima transferência de potência

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{R}_L} = \frac{d}{d\boldsymbol{R}_L}\left(\frac{\boldsymbol{E}_{th}}{\boldsymbol{R}_{th}+\boldsymbol{R}_L}\right)^2 \boldsymbol{R}_L = \boldsymbol{E}_{th}^2 \frac{\boldsymbol{R}_{th}-\boldsymbol{R}_L}{(\boldsymbol{R}_{th}+\boldsymbol{R}_L)^3}$$

De onde se obtém, que para a potência máxima na carga:

$$\frac{dP}{dR_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R}_L = \boldsymbol{R}_{th}\,;$$

A potência máxima na carga será então dada por:

$$\boldsymbol{P} = \left(\frac{\boldsymbol{E}_{th}}{\boldsymbol{R}_{th}+\boldsymbol{R}_L}\right)^2 \boldsymbol{R}_L \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = \frac{E_{th}^2}{4R_{th}}$$