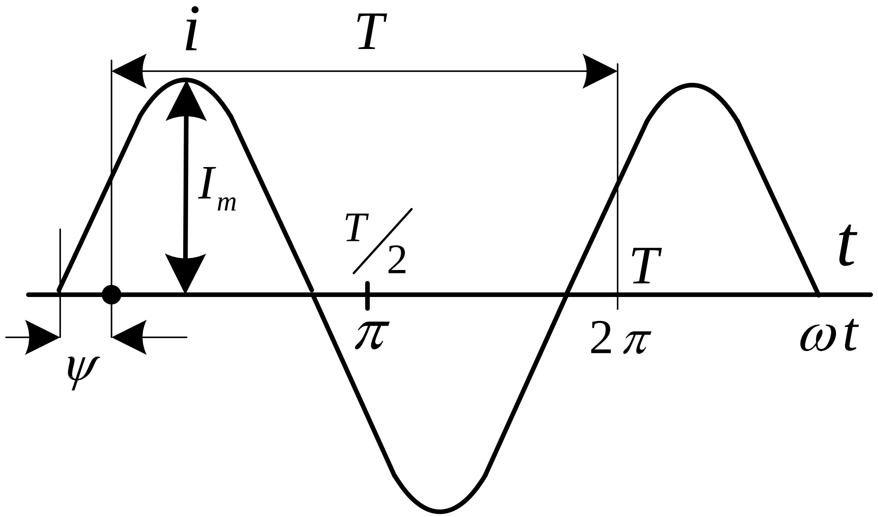
Tema 2: Circuitos de Corrente Alternada Sinusoidal Monofásica

Introdução

- Uma corrente alternada é aquela que é alternadamente positiva e negativa. No caso em que essa variação seja da forma sinusoidal, a corrente é designada alternada sinusoidal.
- A nível da cadeia energética, se ao nível da **utilização** da energia eléctrica, um variado e significativo número de cargas funciona em corrente contínua, a sua **produção**, **transporte** ou **distribuição** é feita quase exclusivamente em corrente alternada

Grandezas e valores característicos

$$i = I_m\, sen\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) = I_m\, sen(\omega t + \psi)$$



$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{\boldsymbol{T}}$$

ψ- ângulo de fase inicial;
ω- frequência angular;
T - período

Valores médios e valores médios quadráticos das quantidades sinusoidais

o valor médio da corrente durante metade do ciclo é:

$$I_{med} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \, sen\omega t \, dt = \frac{2}{\pi} I_m$$

$$i = I_m \, sen(\omega t + \psi)$$

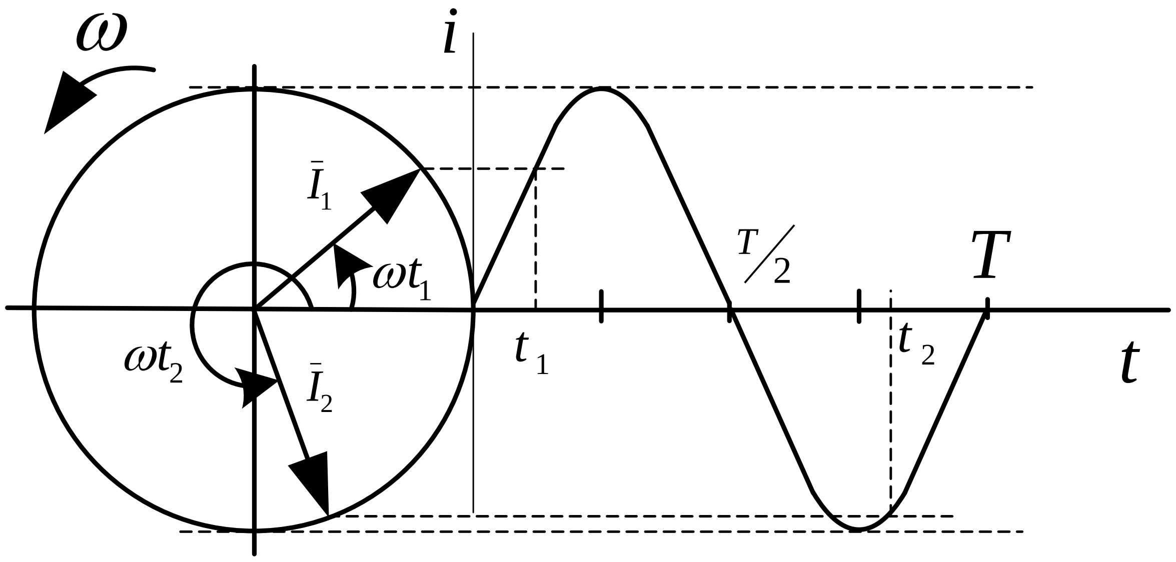
$$F_{Med} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, d\,t$$

o médio quadrático ou valor eficaz da corrente num ciclo é:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \, sen^2 \, \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \, I_m$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, d\,t}$$

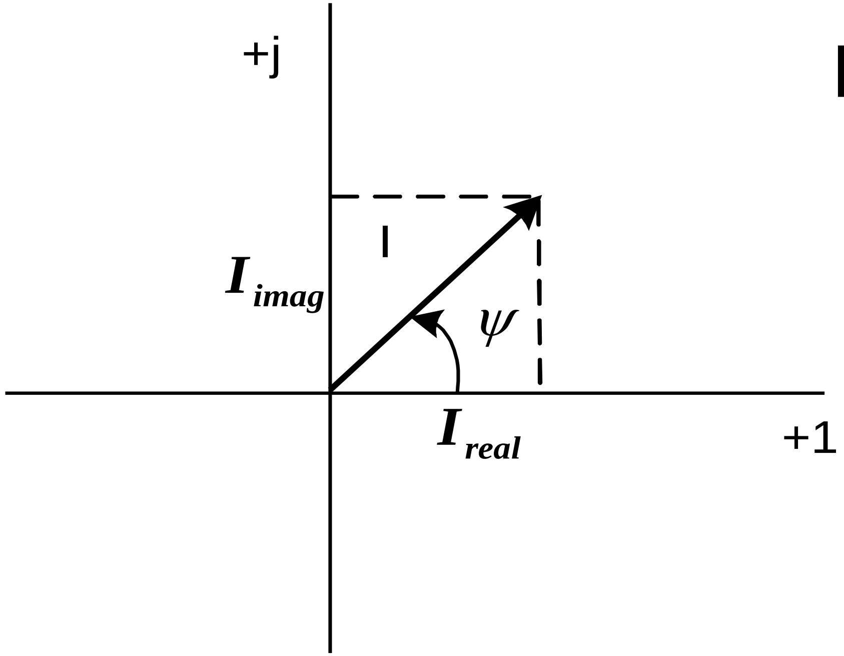
Representação vectorial de quantidades sinusoidais



$$i = I_m \, sen(\omega t)$$

Se representarmos num sistema cartesiano a posição do vector girante em cada instante, obtemos a representação instantânea da quantidade sinusoidal. Assim podemos concluir que uma quantidade sinusoidal pode ser representada por um vector de amplitude constante que roda a uma certa velocidade angular ω.

Se introduzirmos um plano complexo no círculo trigonométrico, podemos representar a quantidade sinusoidal por um valor complexo.



Forma rectangular:

$$\bar{I} = I\cos\psi + j\,I\,sen\psi = I_{real} + jI_{imag}.$$

Forma polar: $\bar{I} = I\angle\psi$,

Forma exponencial: $\bar{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{e}^{j\psi}$

$$\boldsymbol{I} = \sqrt{\boldsymbol{I}_{rea}^2 + \boldsymbol{I}_{ima}^2}\ ,$$

$$\psi = \boldsymbol{arctg}\frac{\boldsymbol{I}_{imag}}{\boldsymbol{I}_{real}}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{I}_{real} > 0$$

$$i = I_m\,sen(\omega t + \psi)$$

$$\psi = \boldsymbol{arctg}\frac{\boldsymbol{I}_{imag}}{\boldsymbol{I}_{real}} \pm 180^{\circ}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{I}_{real} < 0$$

$$j = \sqrt{-1}$$

Operações com valores complexos

Consideremos dois números complexos:

$$\bar{Z}_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{e} \quad \bar{Z}_2 = a_2 + jb_2$$

Soma ou subtracção: $\bar{Z}_s = \bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2).$

Multiplicação: $\bar{Z}_p = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 = Z_1 Z_2 \angle \psi_1 + \psi_2 ,$

Divisão: $\bar{Z}_q = \dfrac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \dfrac{Z_1}{Z_2} \angle \psi_1 - \psi_2 ,$

$$Z_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad Z_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \psi_1 = \arg(\bar{Z}_1) \quad \psi_2 = \arg(\bar{Z}_2)$$

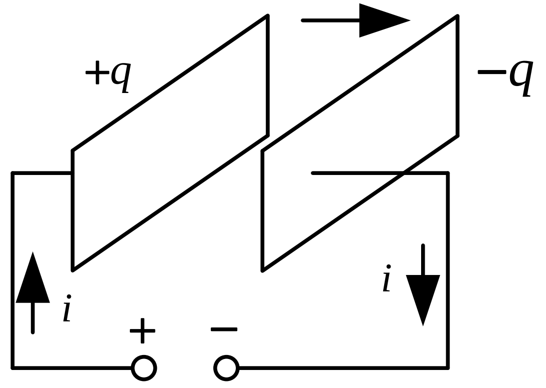
$$\bar{Z}_1 = Z_1 \angle \psi_1 = \underline{Z_1 \, e^{j\psi_1}}$$

$$\bar{Z}_2 = Z_2 \angle \psi_2 = \underline{Z_2 \, e^{j\psi_2}}$$

Elementos armazenadores de energia

Capacitores

$$q = C\,u$$

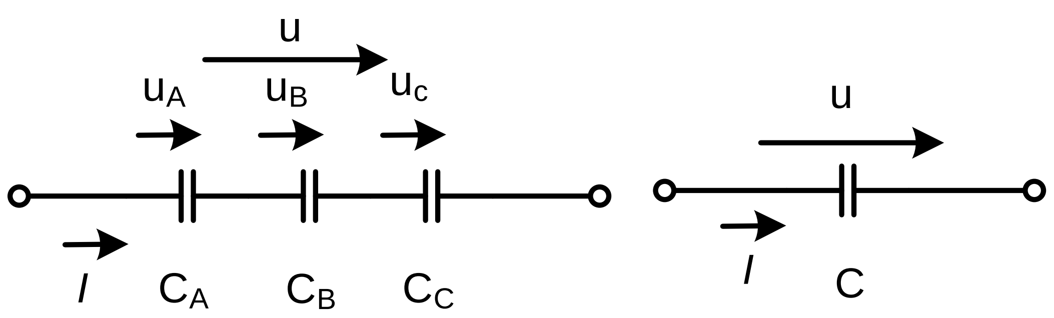


A corrente *i* através de um capacitor é a taxa de variação da carga com o tempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{du}{dt}$$

Associação de capacitores

série



$$u = u_A + u_B + u_C \ ,$$

$$\frac{u}{q} = \frac{u_A}{q} + \frac{u_B}{q} + \frac{u_C}{q}$$

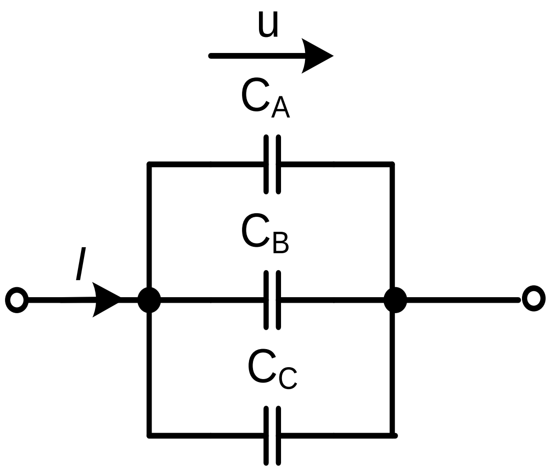
$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i \ dt + C$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_C} .$$

$$q = C \, u$$

Associação de capacitores

Paralelo

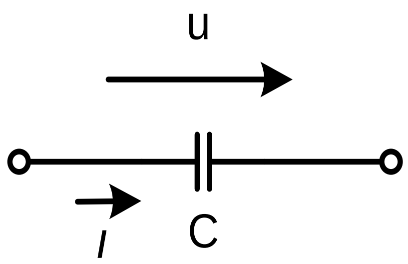


A carga total é a soma das cargas de cada um dos condensadores:

$$q = q_A + q_B + q_C$$

Dividindo por u ambos membros:

$$\frac{q}{u} = \frac{q_A}{u} + \frac{q_B}{u} + \frac{q_C}{u}.$$



Finalmente obtemos:

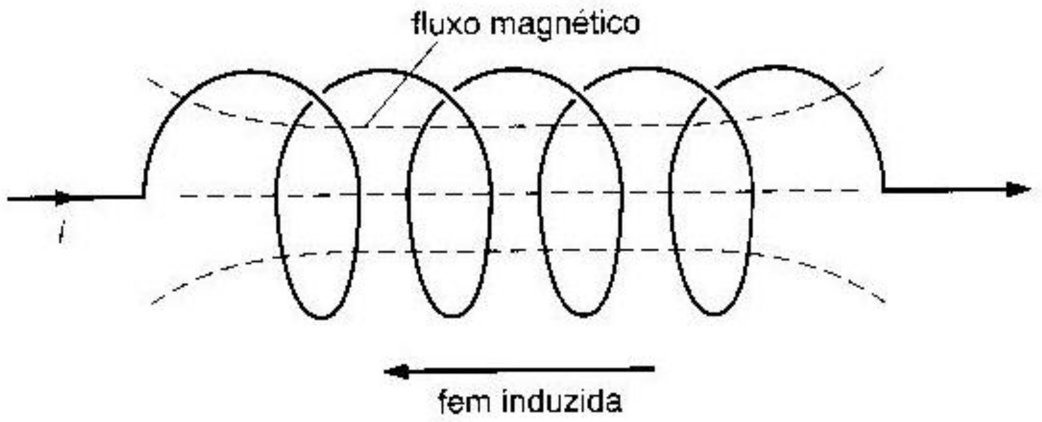
$$C = C_A + C_B + C_C$$

A energia é dada por:

$$W_C = \frac{1}{2} C U^2$$

$$q = C u$$

Indutores



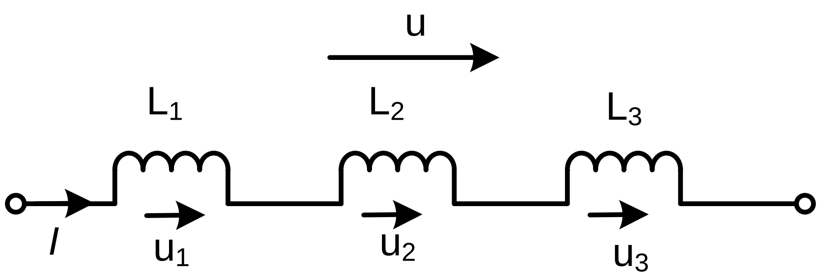
A *f.e.m.* Induzida é dada por: $$e_L = -L\frac{di}{dt},$$

A diferença de potencial sobre o indutor será: $$u_L = L\frac{di}{dt}.$$

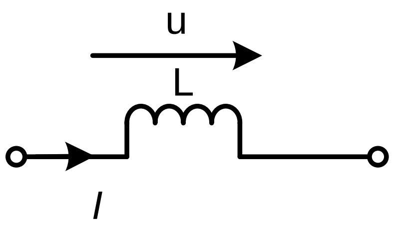
Associação de Indutores

série

A tensão sobre o conjunto é:



$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

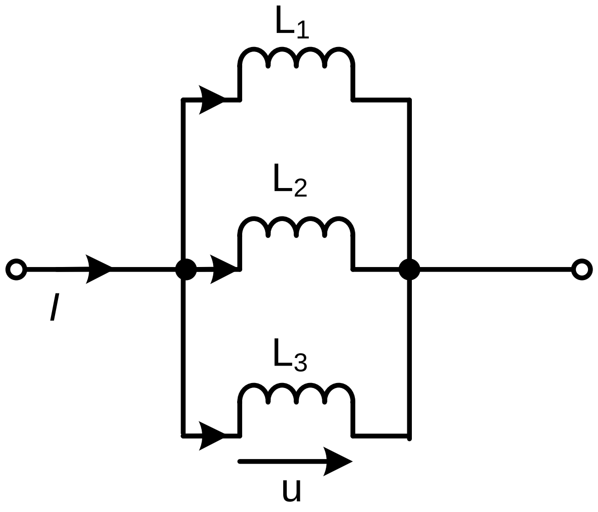


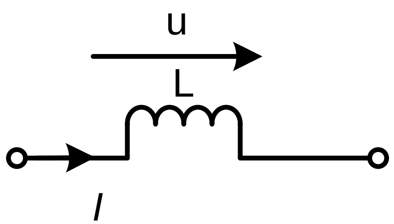
$$u = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{di}{dt}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}.$$

Finalmente obtemos: $$L = L_1 + L_2 + L_3\,.$$

Paralelo





Admitindo que os fluxos magnéticos das bobinas não interajam podemos escrever:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Da equação da tensão numa bobina pode-se escrever:

$$i = \frac{1}{L_1}\int u\,dt + \frac{1}{L_2}\int u\,dt + \frac{1}{L_3}\int u\,dt\,.$$

Já que a tensão é a mesma na ligação pode-se escrever:

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int u\,dt.$$

Finalmente:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}.$$

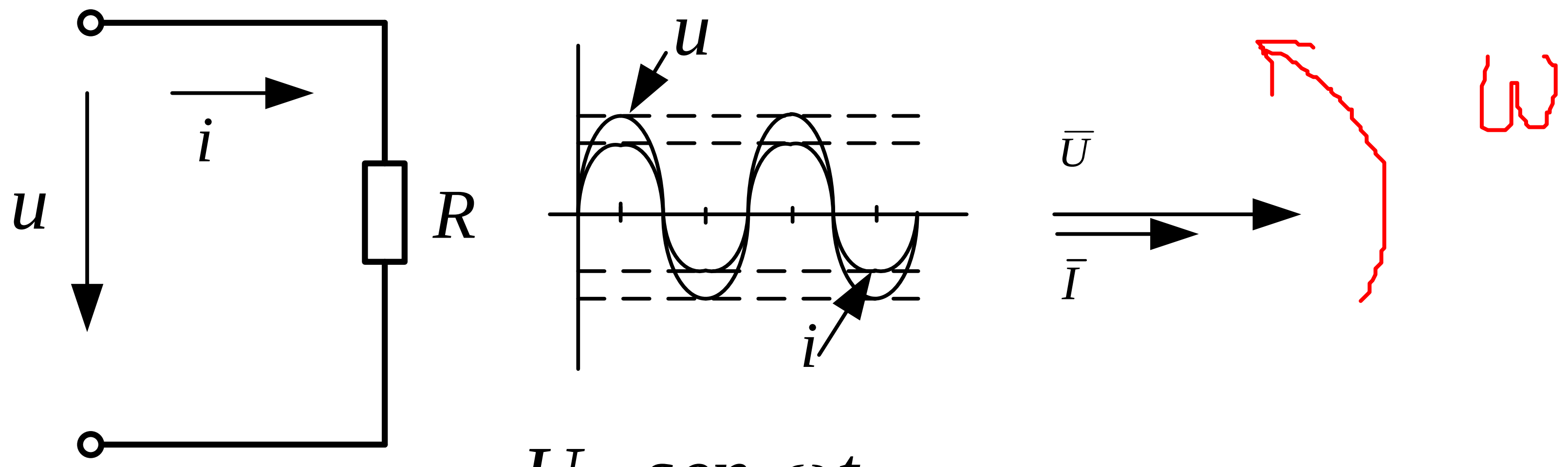
A energia é dada por:

$$W_L = \frac{1}{2} L\, I^2$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} \rightarrow i = \frac{1}{L}\int u_L\; dt + C$$

Comportamento de alguns elementos em CA

Resistência

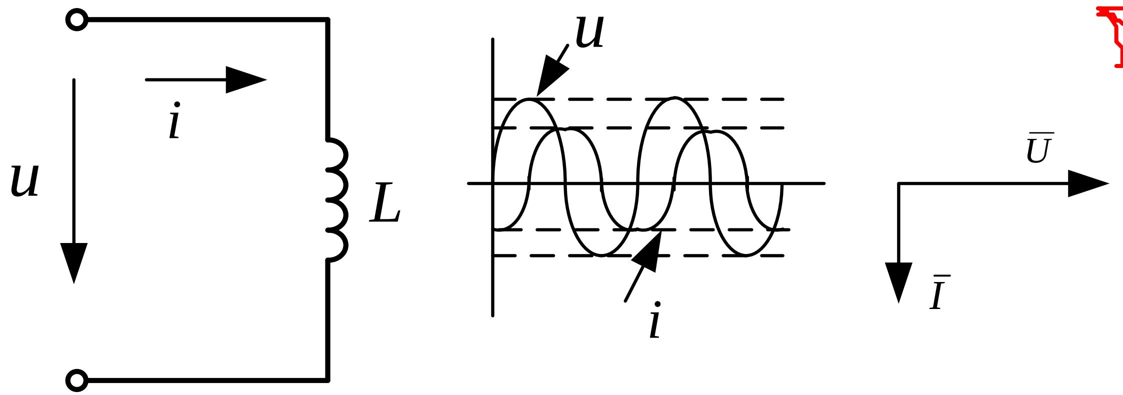


$$u = U_m \operatorname{sen} \omega t \;\; ; i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \operatorname{sen} \omega t}{R} = I_m \operatorname{sen} \omega t \;\; ;$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

Comportamento de alguns elementos em CA

Bobina pura ou Indutância



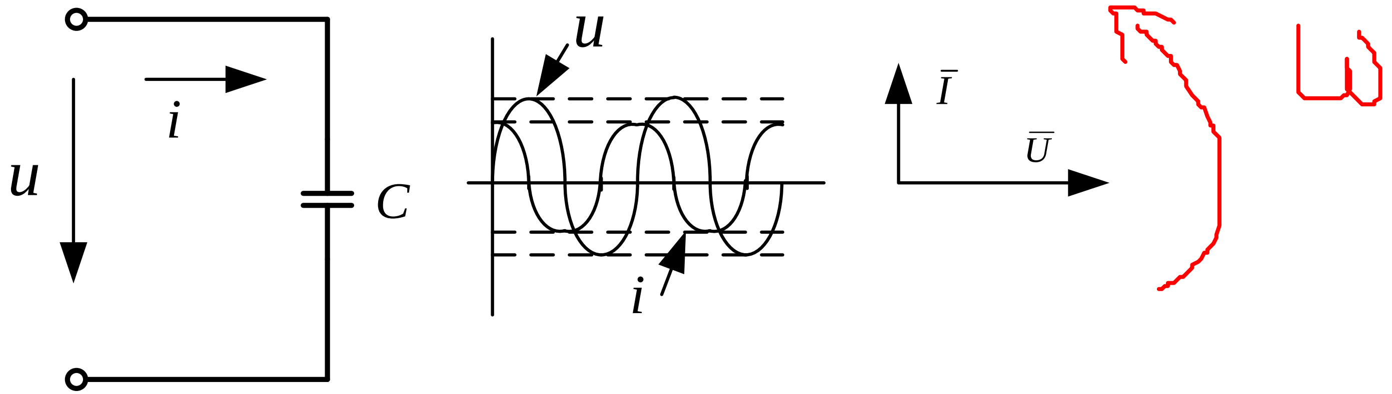
$$u = U_m \, sen\, \omega t \quad ; u_L = L \frac{d\,i}{d\,t} \;\rightarrow i = \frac{1}{L}\int u_L \; dt + C \; ; C = 0 \; ; i = \frac{1}{L}\int u_L \, d\,t \quad ;$$

$$i = -\frac{U_m}{\omega L}\cos \omega t = \frac{U_m}{\omega L} sen\left(\omega t - 90^\circ\right) = I_m \, sen\left(\omega t - 90^\circ\right) ; I_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

$$X_L = \omega L \quad ; \quad \bar{Z}_L = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle -90^\circ} = \omega L \angle 90^\circ = j\,\omega L = j\,X_L$$

Comportamento de alguns elementos em CA

Capacidade pura

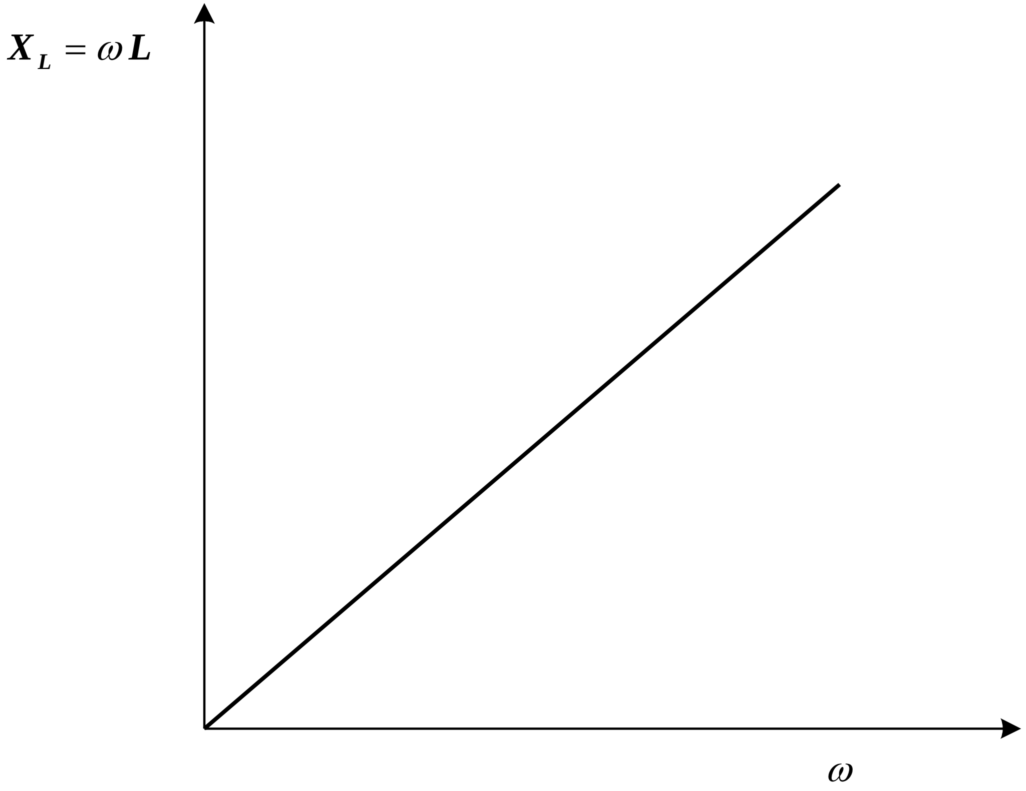


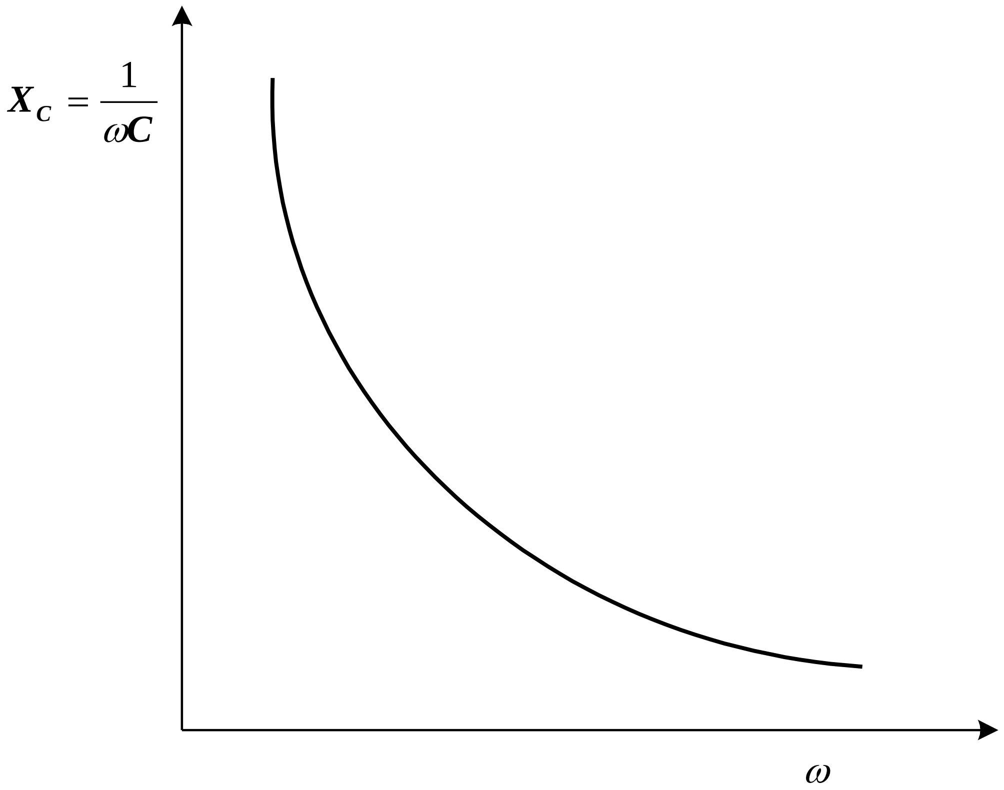
$$u = U_m \, sen \, \omega t \quad ; i = C\frac{du}{dt} = U_m C\omega \cos \omega t = \frac{U_m}{\frac{1}{C\omega}} sen\left(\omega t + 90^\circ\right) = I_m \, sen\left(\omega t + 90^\circ\right)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{C\omega}} ; \; X_C = \frac{1}{\omega C} \quad ; \; \bar{Z}_C = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle 90^\circ} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -j\frac{1}{\omega C} = -j\,X_C$$

Comportamento de alguns elementos em CA

Dependência das reactâncias indutiva e capacitiva em função da frequência





Impedância e admitância

A impedância representa a relação entre o fasor da tensão e o fasor da corrente:

$$\bar{\boldsymbol{Z}} = \frac{\bar{\boldsymbol{U}}}{\bar{\boldsymbol{I}}} \qquad \bar{Z} = R + jX$$

R é a resistência e X a reactância.

A admitância é definida como sendo o inverso da impedância:

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{\bar{\boldsymbol{Z}}} \qquad \bar{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{jB}$$

G é a condutância e B susceptância.

Impedância e admitância

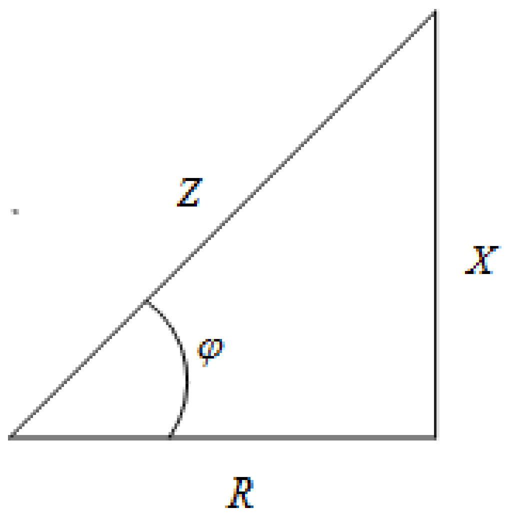
As impedâncias podem ser ligadas em série ou em paralelo ou ainda de forma mista. O cálculo da impedância e admitância equivalente obedece as mesmas regras aplicadas no caso de resistências nos circuitos de corrente contínua.
As figuras abaixo mostram os triângulos de impedância e de admitância, respectivamente.

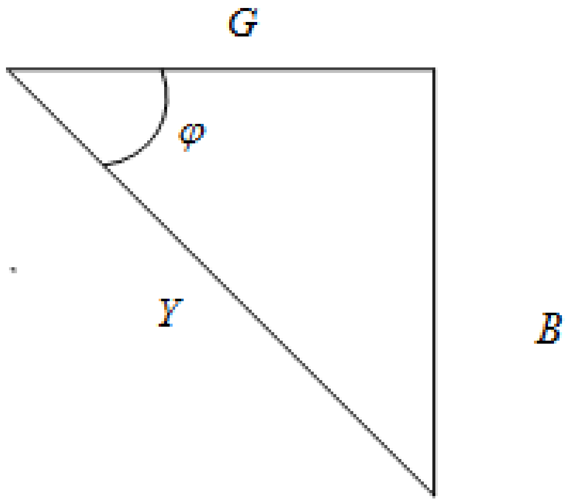
$$\bar{Z} = R + jX\,;\, Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = arct\frac{X}{R}$$

$$\bar{Y} = G + jB; Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\varphi = arct\frac{B}{G}$$





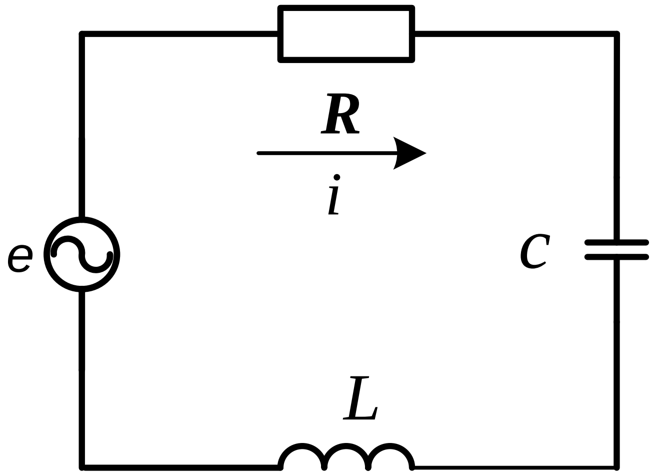
Lei de Ohm na forma complexa

Consideremos o circuito abaixo no qual a aplicação da lei de malhas em valores instantaneos resulta em:

$$u_R + u_L + u_C = e \quad \text{ou} \quad i\,R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e$$

Em notação complexa temos

$$\bar{I}_m\,R + \bar{I}_m\,j\,\omega L + \bar{I}_m\,\frac{(-j)}{\omega C} = \bar{E}_m$$



Lei de Ohm na forma complexa

Resolvendo em ordem a corrente, resulta: $\bar{I}_m = \dfrac{\bar{E}_m}{R + j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}}$

Em valores eficazes temos: $\bar{I} = \dfrac{\bar{E}}{R + j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}} = \dfrac{\bar{E}}{\bar{Z}}$

A expressão anterior mostra-nos a lei de Ohm para circuitos sinusoidais

Leis de Kirchoff na forma complexa

De acordo com a 1ª Lei de Kirchoff, a soma algébrica das correntes em qualquer nó de um circuito é zero, ou

$$\sum \bar{I} = 0$$

A 2ª Lei de Kirchoff estabelece que a soma das quedas de tensão ao longo de uma malha é igual a soma das *f.e.m.* ao longo da mesma malha:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{I}_k \bar{Z}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{E}_k$$

Métodos de cálculo de circuitos de C.A.

Os métodos de cálculo de circuitos estudados em corrente contínua são aplicáveis também nos circuitos de corrente alternada, através do uso do método simbólico . Algumas expecções acontecem em circuitos com acoplamento magnéctico e serão devidamente analisados.