

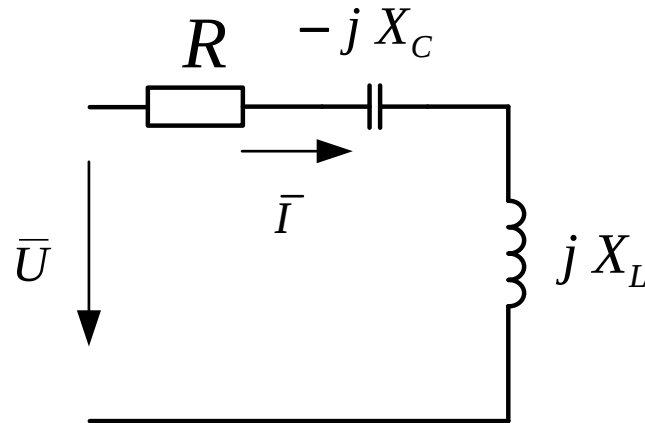
# Regimes de Ressonância nos Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada

Quando um circuito de corrente alternada sinusoidal contendo os elementos resistência, indutância e capacidade comporta-se, nos seus efeitos, como se fosse puramente resistivo, isto é, a corrente e tensão ficam em fase, diz-se que o mesmo está em ressonância.

Podemos ter a ressonância de tensão ou ressonância de corrente.

# Regimes de Ressonância nos Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada

## Ressonância de tensão (Série)



$$\underline{\bar{Z}} = R + j(X_L - X_C); Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \bar{I} = \frac{\bar{U}}{\underline{\bar{Z}}}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j(X_L - X_C)} ; I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

# Regimes de Ressonância nos Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada

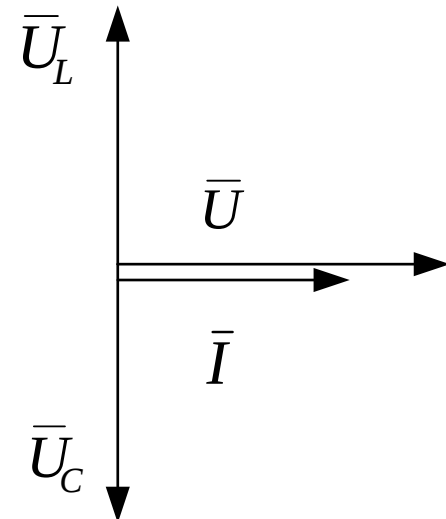
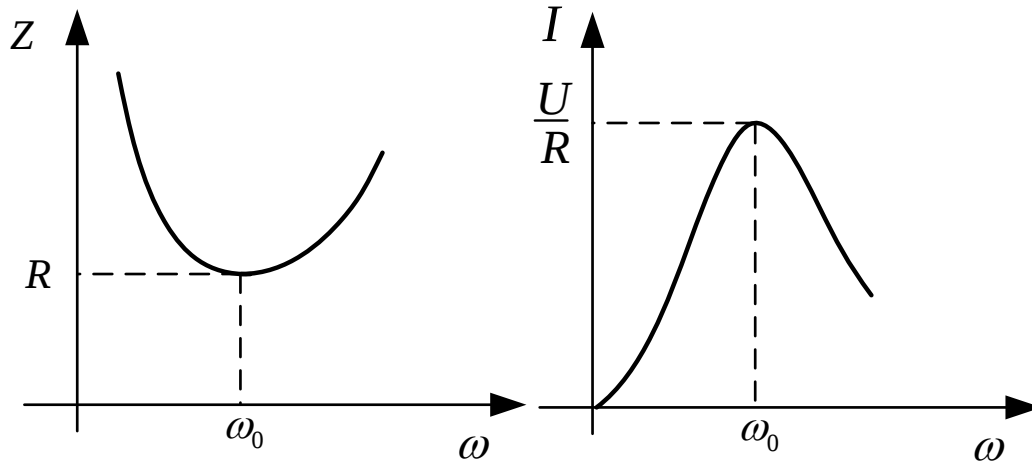
## Ressonância de tensão

$$X_L = X_C \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \bar{Z} = R;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

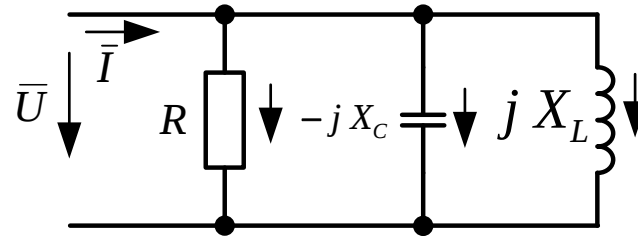
$$Z = R; \bar{I} = \frac{\bar{U}}{R}; I = \frac{U}{R}; Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{I\omega_0 L}{IR} = \frac{I}{I\omega_0 C R} \quad Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$



# Regimes de Ressonância nos Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada

## Ressonância de corrente (Paralelo)



$$\bar{Y} = G + j(Y_C - Y_L); G = \frac{1}{R}; \bar{Y}_C = \frac{1}{-jX_C} = j\frac{1}{X_C}; \bar{Y}_L = \frac{1}{jX_L} = -j\frac{1}{X_L}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (Y_C - Y_L)^2}; \bar{I} = \bar{U} \bar{Y} = \bar{U} [G + j(Y_C - Y_L)]$$

$$I = U \sqrt{G^2 + (Y_C - Y_L)^2}$$

# Regimes de Ressonância nos Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada

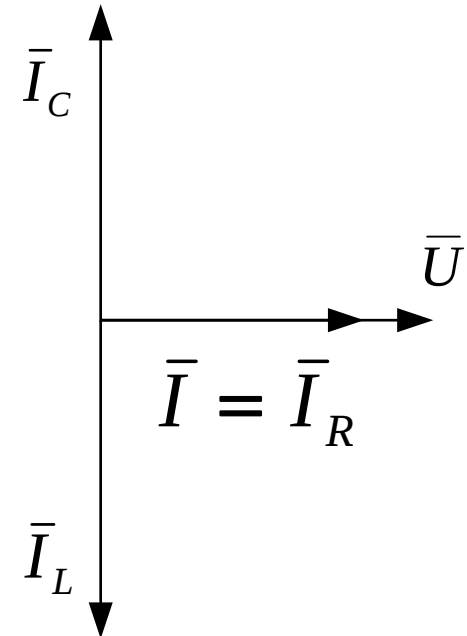
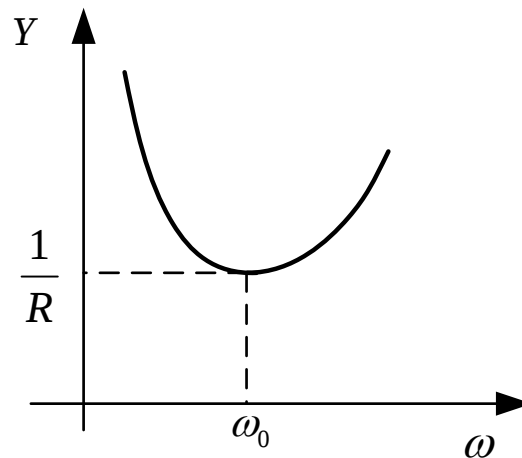
## Ressonância de corrente (Paralelo)

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C; Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{UY_L}{UY_R} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

$$Q = \frac{I_C}{I_R} = \frac{UY_C}{UY_R} = \omega_0 CR$$

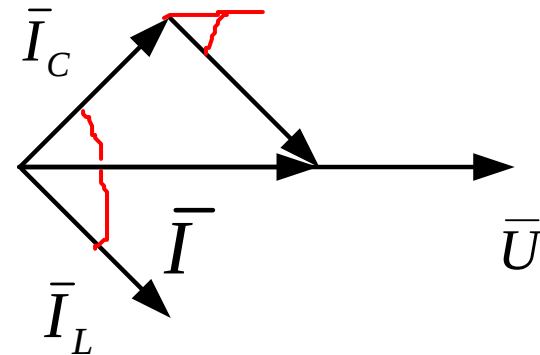
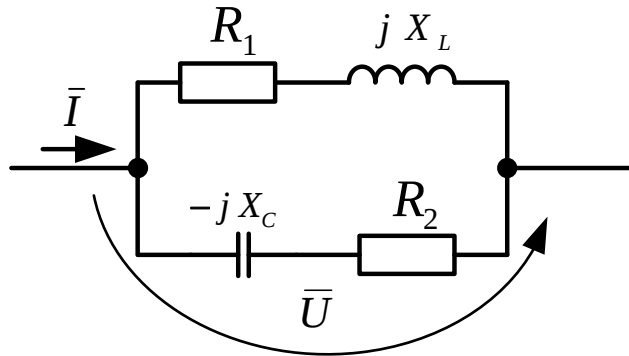
$$Y = \sqrt{G^2 + (Y_C - Y_L)^2}$$

$$Y(\omega) = \sqrt{G^2 + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$$



# Regimes de Ressonância nos Circuitos Eléctricos de Corrente Alternada

## Ressonância de corrente (Paralelo)



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{U} \cdot \bar{Y} ; \bar{Y} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = G + j B$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + j X_L} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} ; \bar{Y}_2 = \frac{1}{R_2 - j X_C} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} + j \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} ;$$

$$G = \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} ; B = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}$$

# Ressonância de corrente

$$B = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}$$
$$0 = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L C}};$$

Analisando a expressão da frequência, pode-se considerar que se :  $R_1 = R_2 = 0 \rightarrow \omega = \omega_0$

Por outro lado tendo em conta o radicando podemos estabelecer as condições de este ser real:

$$\frac{L}{C} > R_1^2 \quad \wedge \quad \frac{L}{C} > R_2^2 \quad \vee \quad \frac{L}{C} < R_1^2 \quad \wedge \quad \frac{L}{C} < R_2^2$$

# Ressonância de corrente

$$\text{Com : } \frac{L}{C} = R_1^2 = R_2^2 \rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{0}{0}}$$

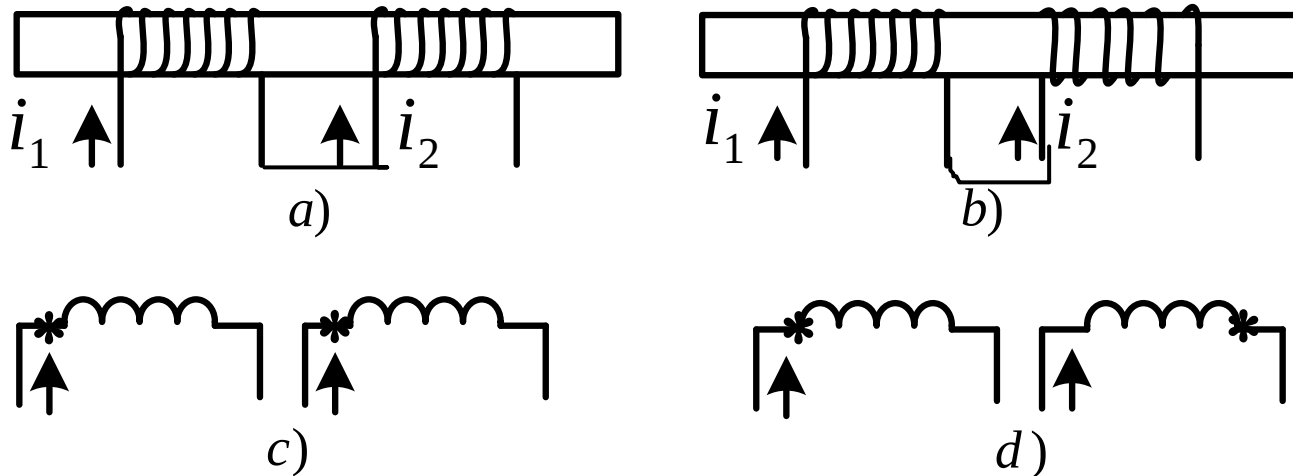
O resultado obtido mostra que a frequência de ressonância é indeterminada. Isto significa que a ressonância pode ocorrer com qualquer frequência.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}$$

# Indutância mútua

## Conceitos Básicos

Se um circuito contém uma indutância mútua (isto é, enrolamentos magneticamente acoplados), o fluxo originado por um, abraça o outro, e regista-se uma ***f.e.m.***, de indução mútua em cada enrolamento que deve ser levada em conta.



# Indutância mútua

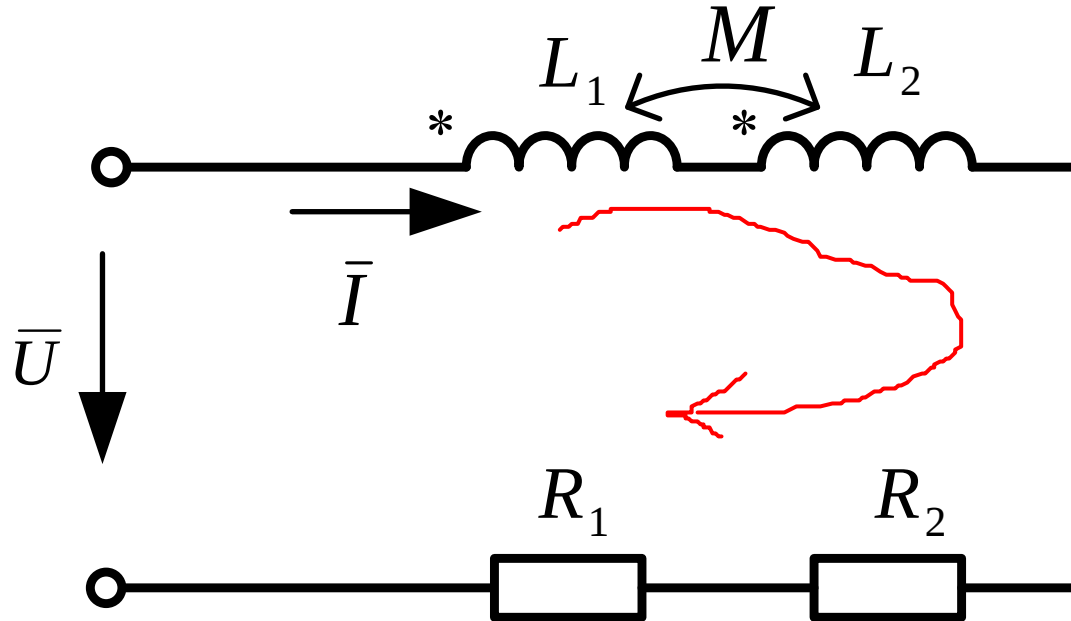
## Conceitos Básicos

As bobinas em a) estão de tal modo acopladas que os seus fluxos somam-se e em b) as bobinas estão acopladas de modo que os seus fluxos estão a contrariar-se um ao outro. O sinal asterisco (ou um ponto) indica o início das bobinas.

Se as correntes numa indutância mútua estão a dirigir-se para (ou distanciar-se de) terminais homólogos as bobinas componentes são referidas como sendo ligadas a somar ou em conjunção.

No caso em que as correntes se dirigem para terminais diferentes, diz-se que as bobinas estão em oposição.

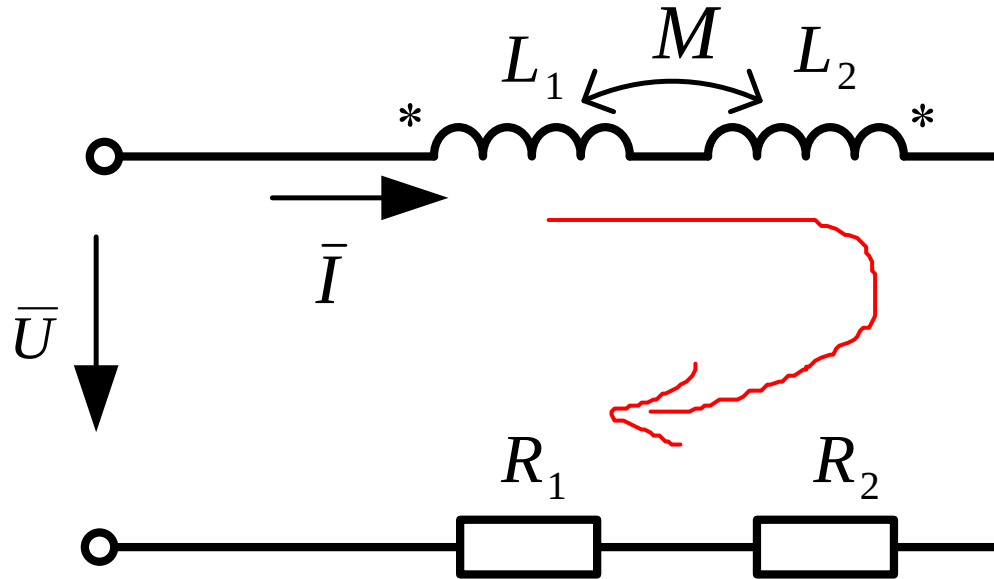
# Indutâncias mútuas em série e em conjunção



$$\bar{U} = \bar{I} [R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 + 2 X_M)]$$

$$\bar{Z}_{conj} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 + 2 X_M)$$

# Indutâncias mútuas em série e em oposição



$$\bar{U} = \bar{I} [R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 - 2 X_M)]$$

$$\underline{\bar{Z}}_{opo} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2 - 2 X_M)$$

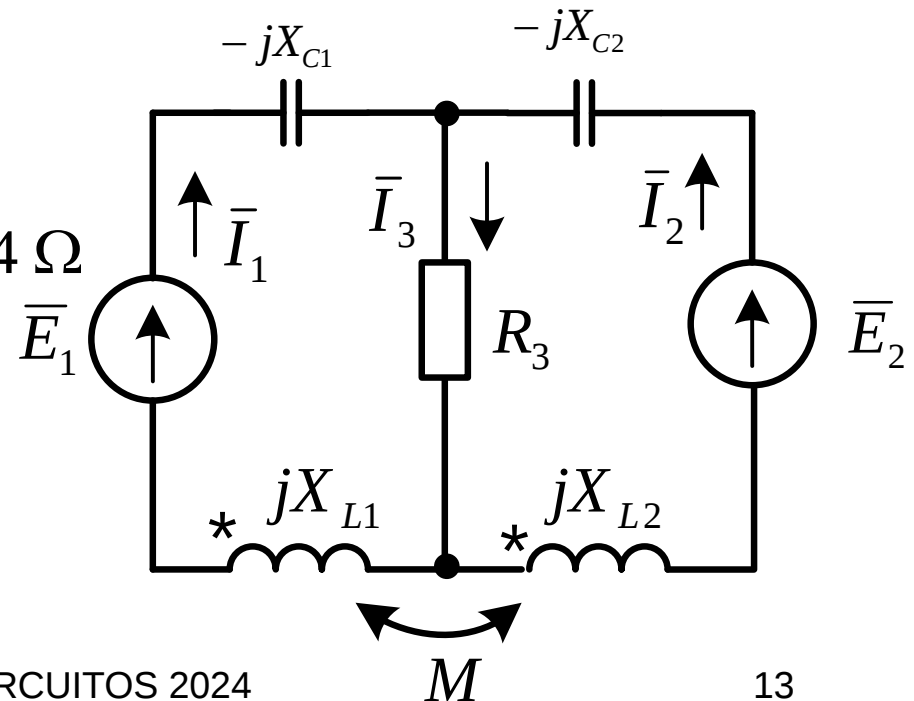
# Cálculo de circuitos magneticamente acoplados

Os circuitos contendo indutância mútua são resolvidos aplicando-se os métodos das leis de Kirchhoff e Malhas independentes.

Exemplo 1 - Calcular as correntes do circuito que se segue, aplicando o método das leis de Kirchhoff, sabendo que:

$$X_{C1} = X_{L1} = X_{C2} = X_{L2} = 8 \Omega$$

$$\bar{E}_1 = 10V; \bar{E}_2 = 10V; R_3 = X_M = 4 \Omega$$



$$N_{eq\_1^a Lei} = N - 1 = 2 - 1 = 1; N_{eq\_2^a Lei} = r - r_c - N + 1 = 3 - 0 - 2 + 1 = 2$$

$$\begin{cases} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_3 \\ \bar{I}_1 j(X_{L1} - X_{C1}) + \bar{I}_3 R_3 - \bar{I}_2 jX_M = \bar{E}_1 \\ \bar{I}_2 j(X_{L2} - X_{C2}) + \bar{I}_3 R_3 - \bar{I}_1 jX_M = \bar{E}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} [R_3 + j(X_{L1} - X_{C1})] \bar{I}_1 + (R_3 - jX_M) \bar{I}_2 = \bar{E}_1 \\ (R_3 - jX_M) \bar{I}_1 + [R_3 + j(X_{L2} - X_{C2})] \bar{I}_2 = \bar{E}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \bar{I}_1 + (4 - j4) \bar{I}_2 = 10 \\ (4 - j4) \bar{I}_1 + 4 \bar{I}_2 = 10 \end{cases} \rightarrow 4 \bar{I}_1 + (4 - j4) \bar{I}_2 = (4 - j4) \bar{I}_1 + 4 \bar{I}_2$$

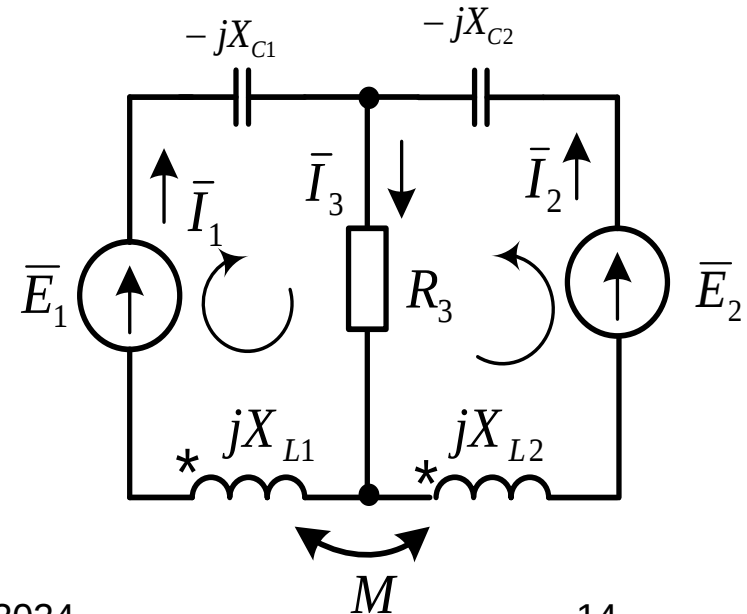
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2; \bar{I}_1 (8 - j4) = 10 \rightarrow \bar{I}_1 = 1,12 \angle 26,56^\circ, A = (1 + j0,5) A$$

$$\bar{I}_3 = (2 + j1) A = 2,24 \angle 26,56^\circ$$

$$X_{C1} = X_{L1} = X_{C2} = X_{L2} = 8 \Omega$$

$$\bar{E}_1 = 10V; \bar{E}_2 = 10V;$$

$$R_3 = X_M = 4 \Omega$$



# Transferência de Energia em Circuitos Acoplados

$$\bar{S}_F = \bar{S}_C ; \bar{S}_F = \sum \bar{E} \cdot \bar{I}^* + \sum \bar{U}_J \cdot \bar{J}^* = P_F + jQ_F$$

$$P_C = \sum I^2 R ; Q_C = \sum I^2 X \pm 2 \sum I_{kp} I_{sr} X_M \cos(\phi_{kp} - \phi_{sr})$$

$$\bar{S}_F = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_2 \bar{I}_2^* = 2 \cdot 10(1 - j0,5) = (20 - j10) \text{ VA} \rightarrow P_F = 20 \text{ W} ; Q_F = -10 \text{ VAR}$$

$$P_C = I_3^2 R_3 = 2,24^2 \cdot 4 = 20,07 \text{ W}$$

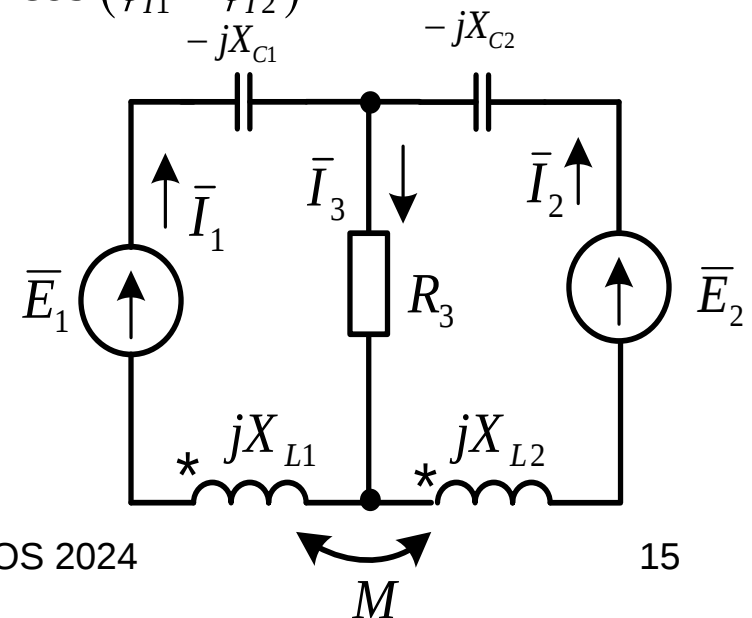
$$Q_C = I_1^2 (X_{L1} - X_{C1}) + I_2^2 (X_{L2} - X_{C2}) - 2 I_1 \cdot I_2 \cdot X_M \cos(\phi_{I1} - \phi_{I2})$$

$$Q_C = -2 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 4 \cdot \cos(0) = -10,04 \text{ VAR}$$

$$X_{C1} = X_{L1} = X_{C2} = X_{L2} = 8 \Omega$$

$$\bar{E}_1 = 10 \text{ V} ; \bar{E}_2 = 10 \text{ V} ;$$

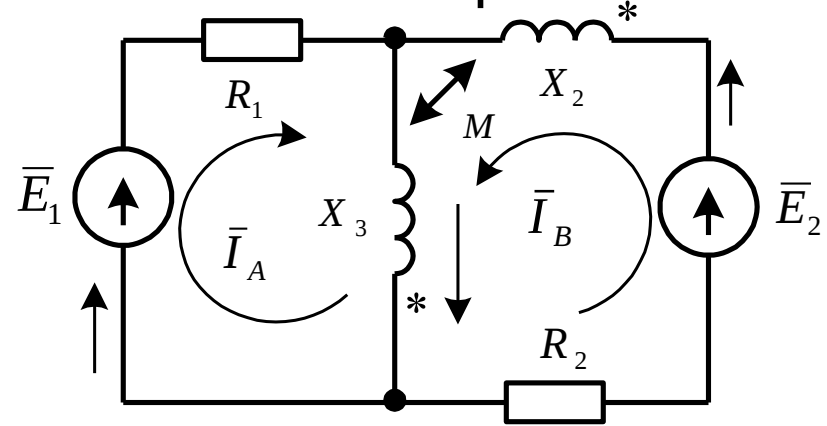
$$R_3 = X_M = 4 \Omega$$



Exemplo 2 - Calcular as correntes do circuito dado, usando o método das malhas independentes. Verificar o equilíbrio de potências.

$$\bar{E}_1 = 12 \text{ V} ; \bar{E}_2 = 10 \text{ V} ; X_2 = X_3 = 5 \Omega ;$$

$$X_M = 5 \Omega, R_1 = R_2 = 4 \Omega$$



$$\begin{cases} \bar{I}_A (R_1 + j X_3) - \bar{I}_B j X_M + \bar{I}_B j X_3 = \bar{E}_1 \\ \bar{I}_B [R_2 + j (X_2 + X_3)] - \bar{I}_A j X_M + \bar{I}_A j X_3 - 2 j X_M \bar{I}_B = \bar{E}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{I}_A (4 + j 5) = 12 \\ 4 \bar{I}_B = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_A = \frac{12}{4 + j 5} = 1,17 - j 1,46, \text{ A} \\ \bar{I}_B = 2,5 \text{ A} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{I}_A = 1,87 \angle -51,34^\circ, \text{ A} \\ \bar{I}_B = 2,5, \text{ A} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \bar{I}_A = \frac{12}{4 + j5} = 1,17 - j1,46, A \\ \bar{I}_B = 2,5 A \end{cases} \begin{cases} \bar{I}_A = 1,87 \angle -51,34^\circ, A \\ \bar{I}_B = 2,5, A \end{cases} ;$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_A ; \bar{I}_2 = \bar{I}_B ; \bar{I}_3 = \bar{I}_A + \bar{I}_B = 3,67 - j1,46 = 3,95 \angle -21,74^\circ, A$$

$$\bar{S}_F = \bar{E}_1 \bar{I}_1^* + \bar{E}_2 \bar{I}_2^* = 12 (1,17 + j1,46) + 10 \cdot 2,5 = (39,04 + j17,52) VA$$

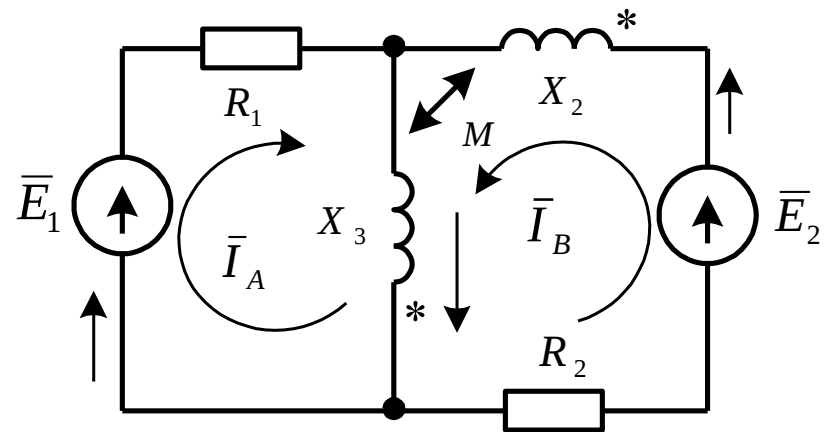
$$P_C = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 4 \cdot (1,87^2 + 2,5^2) = 38,98 W ;$$

$$Q = I_2^2 X_2 + I_3^2 X_3 - 2 I_2 \cdot I_3 \cdot X_M \cos(\varphi_{I2} - \varphi_{I3})$$

$$Q = 2,5^2 \cdot 5 + 3,95^2 \cdot 5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3,95 \cdot 5 \cdot \cos(21,74) = 17,54 VAR$$

$$\bar{E}_1 = 12 V ; \bar{E}_2 = 10 V ; X_2 = X_3 = 5 \Omega ;$$

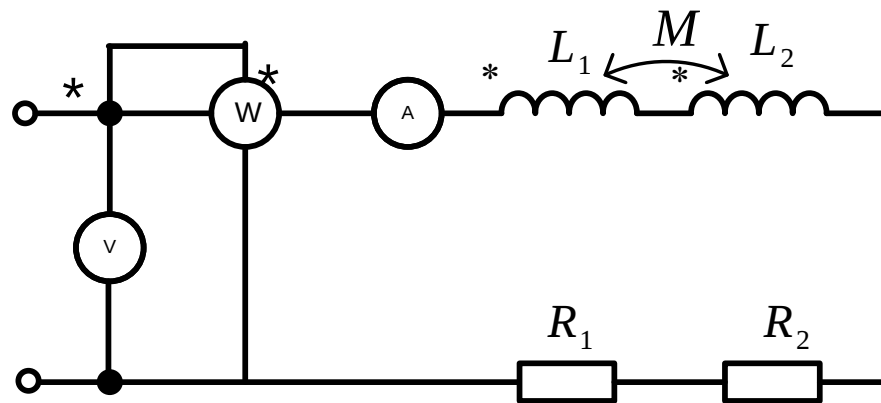
$$X_M = 5 \Omega, R_1 = R_2 = 4 \Omega$$



# Determinação Experimental da Indutância Mútua

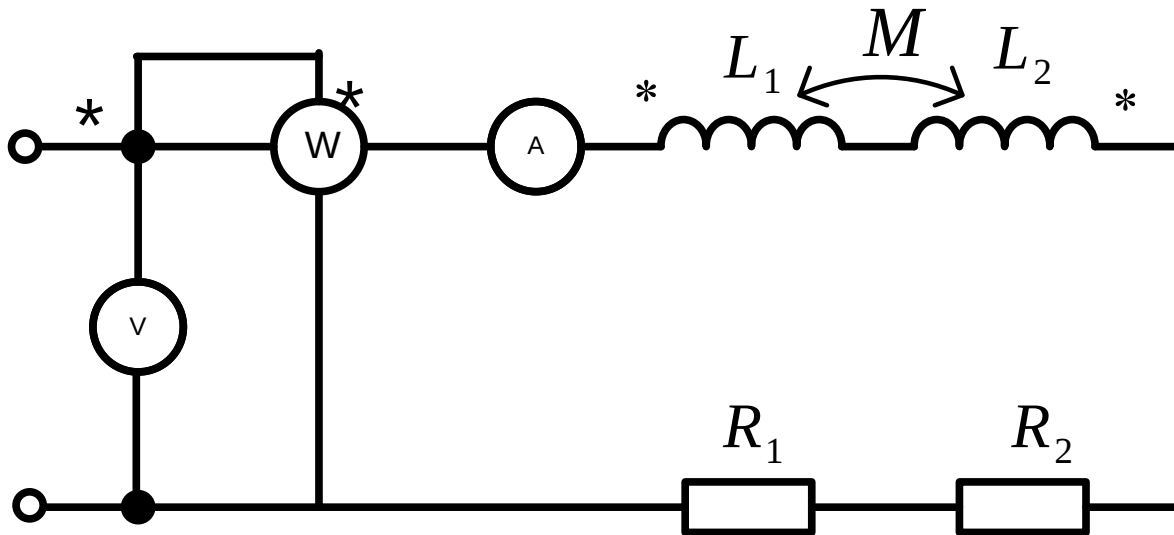
Discutiremos dois métodos. No primeiro método são efectuadas duas experiências com as bobinas ligadas em série e em conjunção e em seguidas as mesmas bobinas são conectadas em série e em oposição.

$$Z_{conj} = \frac{U_{conj}}{I_{conj}} ; R_{conj} = \frac{P_{conj}}{I_{conj}^2} ; X_{conj} = \sqrt{Z_{conj}^2 - R_{conj}^2}$$



# Determinação Experimental da Indutância Mútua

$$Z_{opo} = \frac{U_{opo}}{I_{opo}} ; R_{opo} = \frac{P_{opo}}{I_{opo}^2} ; X_{opo} = \sqrt{Z_{opo}^2 - R_{opo}^2}$$



$$X_{conj} = \omega (L_1 + L_2 + 2 M)$$

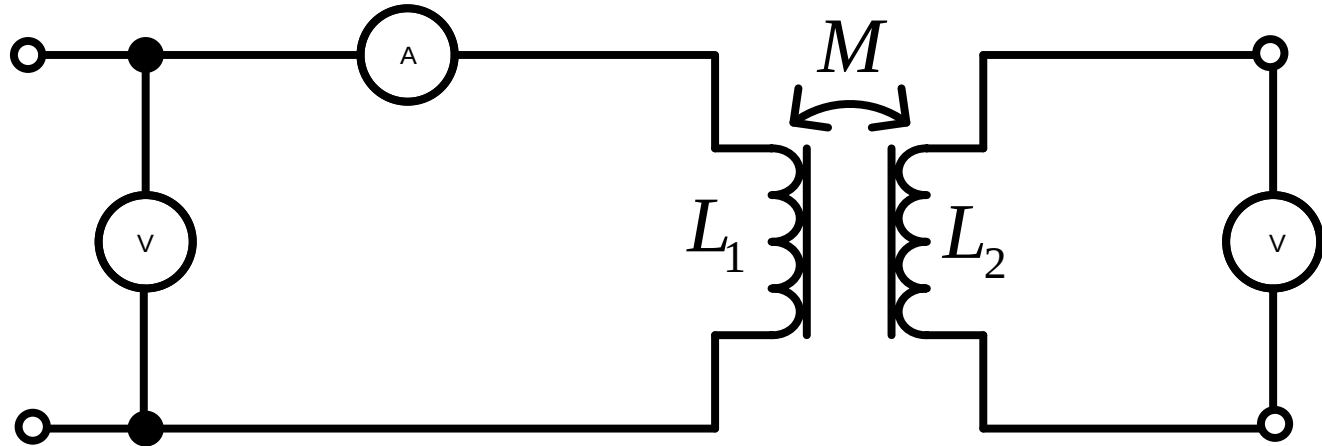
$$X_{opo} = \omega (L_1 + L_2 - 2 M)$$

$$X_{conj} - X_{opo} = 4 \omega M \rightarrow$$

$$M = \frac{X_{conj} - X_{opo}}{4 \omega}$$

$$M = \frac{X_{conj} - X_{opo}}{8 \pi f}$$

# Determinação Experimental da Indutância Mútua



$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} ; U_2 = \omega M I_1 \rightarrow M = \frac{U_2}{\omega I_1} = \frac{U_2}{2 \pi f I_1}$$